

Mecânica Quântica I (4302403)

1º. Semestre de 2023

Prof. Sylvio Canuto

Monitores: Mateus Bergami Rocha e Ana Luisa Foguel

Lista de Exercícios sobre Momento Angular

1 – Verifique que $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$ etc. e também que $[L^2, L_x] = 0$ etc.

2 – Definindo $L_{\pm} = L_x \pm iL_y$, verifique que

$$[L^2, L_{\pm}] = 0 \text{ e } [L_z, L_{\pm}] = \pm \hbar L_{\pm}.$$

3 – Verifique que $L_i^{\dagger} = L_i$ e $L_{\pm}^{\dagger} = L_{\mp}$.

4 – Verifique que $L_{\pm} L_{\mp} = L^2 - L_z^2 \pm \hbar L_z$.

5 – Se $\varphi_{l,m} = |lm\rangle$ são autovalores de L^2 e L_z com:

$$L^2 |lm\rangle = \hbar^2 l(l+1) |lm\rangle \text{ e } L_z |lm\rangle = \hbar m |lm\rangle$$

normalizados, isto é $\langle lm | lm' \rangle = \delta_{mm'}$, verifique que $|lm \pm 1\rangle$ normalizado é dado por

$$|lm \pm 1\rangle = \frac{1}{\hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}} L_{\pm} |lm\rangle.$$

6 – Um rotor rígido simétrico tem hamiltoniano $H = \frac{L^2}{2I}$ onde I é o momento de inércia.

Quais são os níveis de energia (autovalores) e os estados correspondentes? Para cada nível de energia, qual é a degenerescência?

7 – Uma partícula está num autoestado $|lm\rangle$ de L^2 e L_z com os mesmos autovalores do exercício 5. Prove que

$$\begin{aligned} \langle L_x \rangle &= \langle L_y \rangle = 0; \\ \langle L_x^2 \rangle &= \langle L_y^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2} (l(l+1) - m^2). \end{aligned}$$

8 – Dado $Y_{21}(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta e^{i\varphi}$, obtenha Y_{22} e Y_{20} aplicando os operadores L_+ e L_- com as normalizações corretas.

Encontre a matriz que representa L_x para uma partícula de momento angular $l = 1$ (usando a base de autoestados de L_z). Determine os autovalores de L_x .

10 – Encontre a matriz que representa S_x para uma partícula de spin $\frac{3}{2}$ (usando a base de autoestados de S_z). Determine os autovalores de S_x .

11 – Mostre que se um operador comuta com duas componentes do momento angular então ele também comuta com a terceira.

Verifique que as matrizes de Pauli satisfazem

$$\vec{\sigma} \times \vec{\sigma} = 2i\vec{\sigma}$$

$$\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x$$