A integral de Darboux - Critério de Integrabilidade e Propriedades
Aula 29

Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

Primeiro Semestre de 2023

A integral de Darboux

Vamos dar uma noção (devido a Darboux) equivalente à noção de integral de Riemann que apresenta algumas vantagens na obtenção de critérios de integrabilidade. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e

$$P : \; a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n_P} = b,$$

uma partição de $[a, b]$. Sejam

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \; \text{ e } \; m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Defina a soma superior S_p (inferior s_P) de f relativamente à partição P por

$$S_P = \sum_{i=1}^{n_P} M_i \Delta x_i \quad \left(s_P = \sum_{i=1}^{n_P} m_i \Delta x_i \right).$$

Seja P uma partição e Q uma partição obtida de P adicionando um ponto $\bar{x}$. É imediato que $S_Q \leq S_P$ e que $s_Q \geq s_P$. Mais geralmente, se $P \subset Q$ temos que $S_Q \leq S_P$ e que $s_Q \geq s_P$.

Dadas duas partições P e Q denotamos por $P \cup Q$ à partição formada pelos pontos de P e de Q.

Segue que, dadas duas partições P e Q quaisquer

$$\inf_{x \in [a,b]} f(x)(b-a) \leq s_P \leq s_{P \cup Q} \leq S_{P \cup Q} \leq S_Q \leq \sup_{x \in [a,b]} f(x)(b-a)$$

Definição

Se $\mathscr{P}$ denota o conjunto de todas as partições do intervalo $[a,b]$ e $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma função limitada a integral superior (inferior) de f é definida por

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{S_P : P\in\mathscr{P}\} \quad \left(\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{s_P : P\in\mathscr{P}\}\right)$$

Definição

Uma função limitada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é Darboux integrável se, e somente se,

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

e neste caso o valor comum é denotado por $D\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

Critério de Integrabilidade para integrais de Darboux

Teorema

Uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é Darboux integrável se, e somente se, dado $\epsilon > 0$ existe partição $P \in \mathscr{P}$ tal que

$$S_P - s_P < \epsilon.$$

Prova: Recorde que, se $R, Q \in \mathscr{P}$ então,

$$S_R \geq S_{R \cup Q} \geq \overline{\int_a^b} f(x)dx \geq \underline{\int_a^b} f(x)dx \geq s_{R \cup Q} \geq s_Q.$$

Teorema

Uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é Riemann integrável se, e somente se, é Darboux integrável e em qualquer caso

$$D\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Lembrar do Teorema do Confronto para $D \Rightarrow R$. Para qualquer partição P de $[a, b]$ vale

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx \leftarrow s_P \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \leq S_P \to \overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

$R \Rightarrow D$ é ainda mais simples, segue da definição de *sup* e *inf*.

Critério de Integrabilidade

Proposição

Se f for contínua em $[a, b]$ então,

- *f é uniformemente contínua; isto é, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (que depende somente de ϵ) tal que, se $x, y \in [a, b]$ e $|x - y| < \delta$ então, $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. (Exercício)*
- *f é Darboux (e Riemann) integrável em $[a, b]$.*

Definição

Se existir a integral $\int_a^b f(x)\,dx$, *então definiremos*

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Propriedades da Integral

Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis. Então

- Para todo $k \in \mathbb{R}$, a função $f + kg$ é integrável e
$$\int_a^b (f + kg)(x)\ dx = \int_a^b f(x)\, dx + k \int_a^b g(x)\ dx.$$
- Se $a \leq c < d \leq b$, então f é integrável em $[c, d]$.
- Se $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x)\ dx \geq 0$. Em particular, se $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então
$$\int_a^b g(x)\ dx \leq \int_a^b f(x)\ dx.$$
- Se existirem as integrais $\int_a^c f(x)\ dx$ e $\int_c^b f(x)\ dx$, com $c \in [a, b]$, então existirá a integral $\int_a^b f(x)\ dx$ e
$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx\ .$$

Vamos apenas provar a primeira propriedade e no caso $k = 1$, os demais casos são deixados como exercício. Sabemos do critério de integrabilidade que, dado $\epsilon > 0$ existem partições $P, Q \in \mathscr{P}$ tais que $S_P^f - s_P^f < \epsilon/2$ e $S_Q^g - s_Q^g < \epsilon/2$. Assim,

$$\begin{aligned} s_P^f + s_Q^g \leq s_{P\cup Q}^f + s_{P\cup Q}^g &\leq \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\ dx \\ &\leq S_{P\cup Q}^f + S_{P\cup Q}^g \leq S_P^f + S_Q^g \end{aligned}$$

Como (exercício) $s_{P\cup Q}^f + s_{P\cup Q}^g \leq s_{P\cup Q}^{f+g} \leq S_{P\cup Q}^{f+g} \leq S_{P\cup Q}^f + S_{P\cup Q}^g$, segue que $S_{P\cup Q}^{f+g} - s_{P\cup Q}^{f+g} < \epsilon$. Do critério de integrabilidade $f+g$ é integrável e, como $\epsilon > 0$ é arbitrário,

$$\int_a^b (f+g)(x)\ dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\ dx.$$

O Teorema Fundamental do Cálculo

Teorema (Teorema Fundamental do Cálculo)

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua então, a função g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \qquad a \leq x \leq b$$

é diferenciável em $[a, b]$ e $g'(x) = f(x)$.

Prova: Se x e $x+h$ estão em $[a,b]$, então

$$\begin{aligned} g(x+h)-g(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\ dt - \int_a^x f(t)\ dt \\ &= \int_a^x f(t)\ dt + \int_x^{x+h} f(t)\ dt - \int_a^x f(t)\ dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)\ dt, \end{aligned}$$

logo para $h \neq 0$,

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\ dt.$$

Como f é contínua em no intervalo fechado de extremos x e $x+h$ pelo Teorema de Weierstrass existem x_1 e x_2 entre x e $x+h$ tais que $f(x_1) \leq f(t) \leq f(x_2)$ para todo t entre x e $x+h$. Logo,

$$f(x_1) \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\, dt \leq f(x_2).$$

ou equivalentemente,

$$f(x_1) \leq \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \leq f(x_2).$$

Agora, quando $h \to 0$, $x_1 \to x$ e $x_2 \to x$. Conseqüentemente,

$$\lim_{h\to 0} f(x_1) = f(x), \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0} f(x_2) = f(x),$$

pois f é contínua, e assim pelo Teorema do Confronto,

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x),$$

e o teorema está demonstrado. $\square$

Exemplo

Ache a derivada da função $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\, dt.$

Como $f(t) = \sqrt{1+t^2}$ é contínua, pelo Teorema Fundamental do Cálculo $g'(x) = \sqrt{1+x^2}$.

Exemplo

Calcule a derivada de $g(x) = \int_1^{x^4} \sec(t)\, dt.$

Utilizamos o Teorema Fundamental do Cálculo e a Regra da Cadeia. Seja $u = x^4$, então

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\int_1^{x^4} \sec(t)\, dt \overset{RC}{=} \frac{d}{du}\int_1^{u} \sec(t)\, dt \frac{du}{dx}$$
$$= \sec(u)\frac{du}{dx} = \sec(x^4)4x^3.$$

Cálculo de Integrais Definidas

Do Teorema Fundamental do Cálculo, se $f : [a, b] \to R$ é contínua então

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é uma primitiva de f. Se G é outra primitiva de f, temos que existe uma constante $k \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = G(x) + k$. Como $F(a) = 0$ temos que $G(a) = -k$ e

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a).$$

Em particular (para qualquer primitiva G de f, inclusive F)

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a).$$