
Grafos: caminhos mínimos

Parte 1

SCC0216/503 Modelagem Computacional em
Grafos/Algoritmos e Estruturas de Dados 2

Thiago A. S. Pardo
Maria Cristina F. Oliveira

O problema do menor caminho

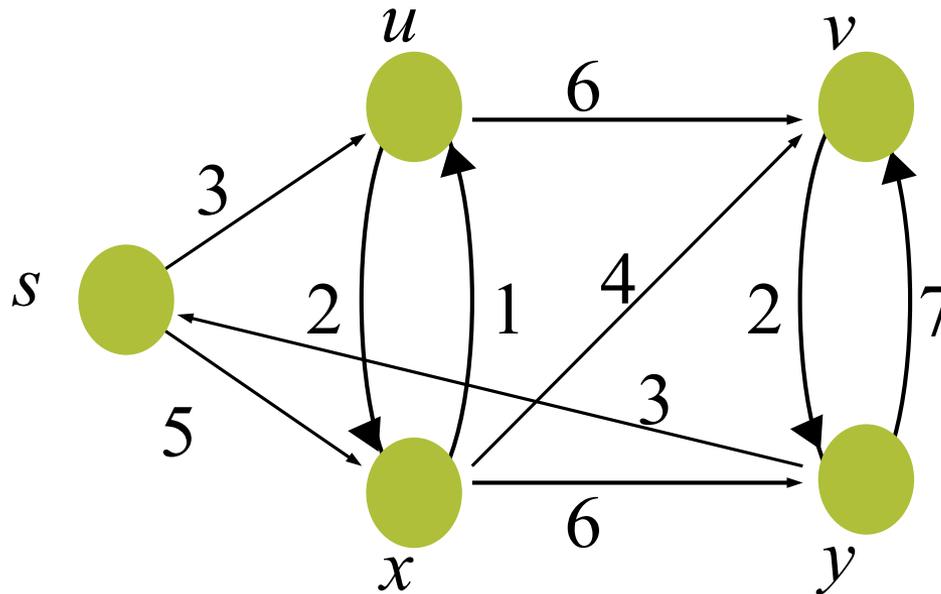
- Um **motorista deseja encontrar o caminho** mais curto possível entre duas cidades do Brasil
- Ele consulta o Waze: a partir de um mapa rodoviário do Brasil, que apresenta as rodovias e distâncias entre cada par de cidades, como determinar uma rota mais curta entre as cidades desejadas?
- Uma maneira possível seria enumerar todas as rotas possíveis que levam de uma cidade à outra, calcular as distâncias, e então selecionar a mais curta

O problema do menor caminho

- Menor caminho = caminho de menor custo = melhor caminho
- Custo = distância ou qualquer outra métrica
- Cidades representadas como vértices de um grafo, rodovias entre elas representadas como relações de adjacência
 - Dois vértices estão conectados se as cidades que representam estão unidas por uma rodovia
 - Os pesos das arestas indicam o custo associado

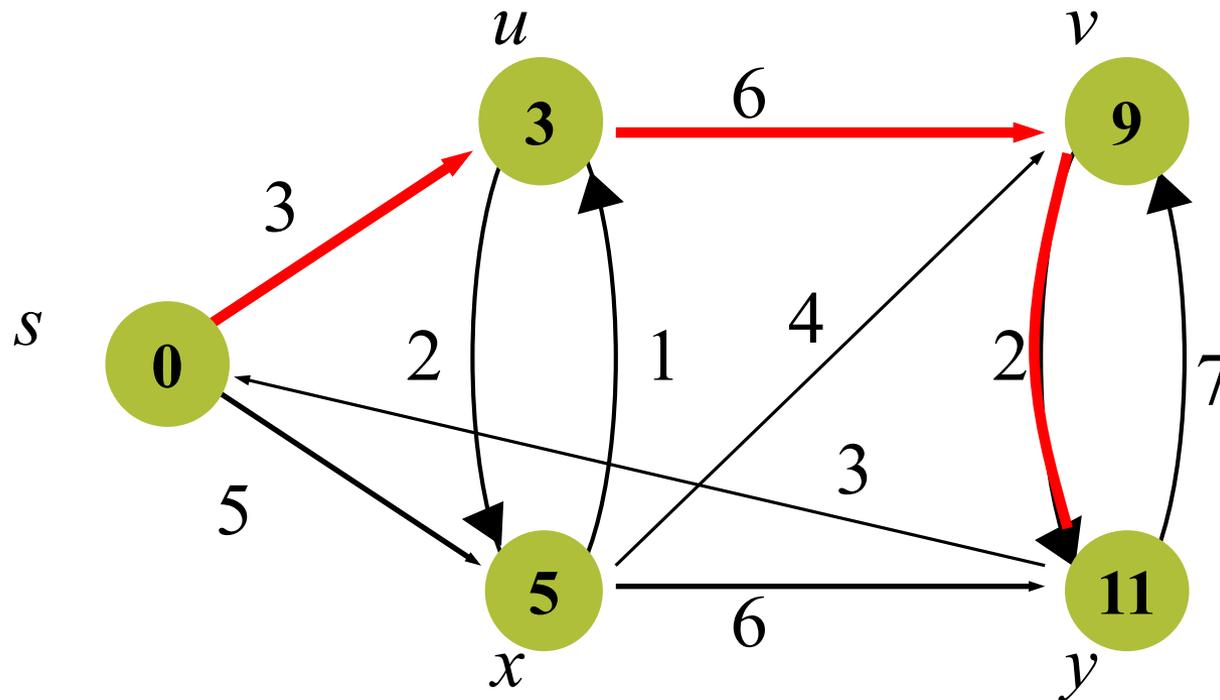
Caminhos mínimos

- O problema do caminho mínimo consiste em determinar um menor caminho entre um vértice de origem u e um vértice de destino v
- Qual o menor caminho entre s e y ?



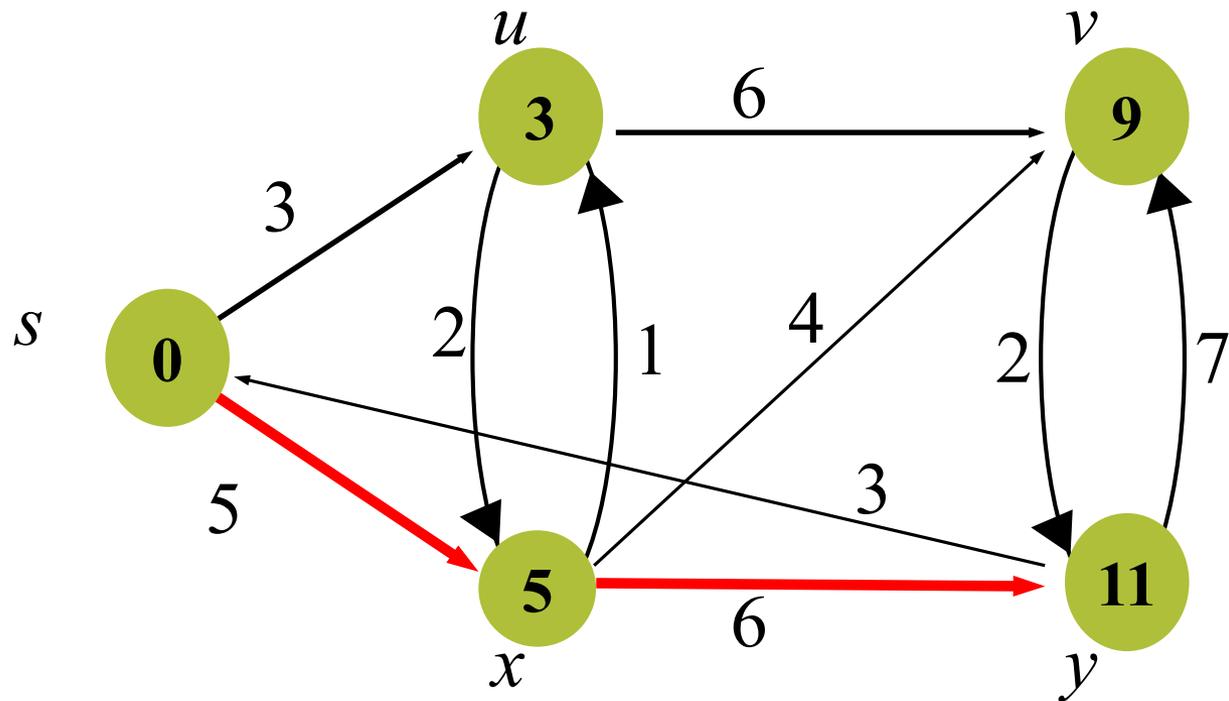
Caminhos mínimos

- Possíveis caminhos



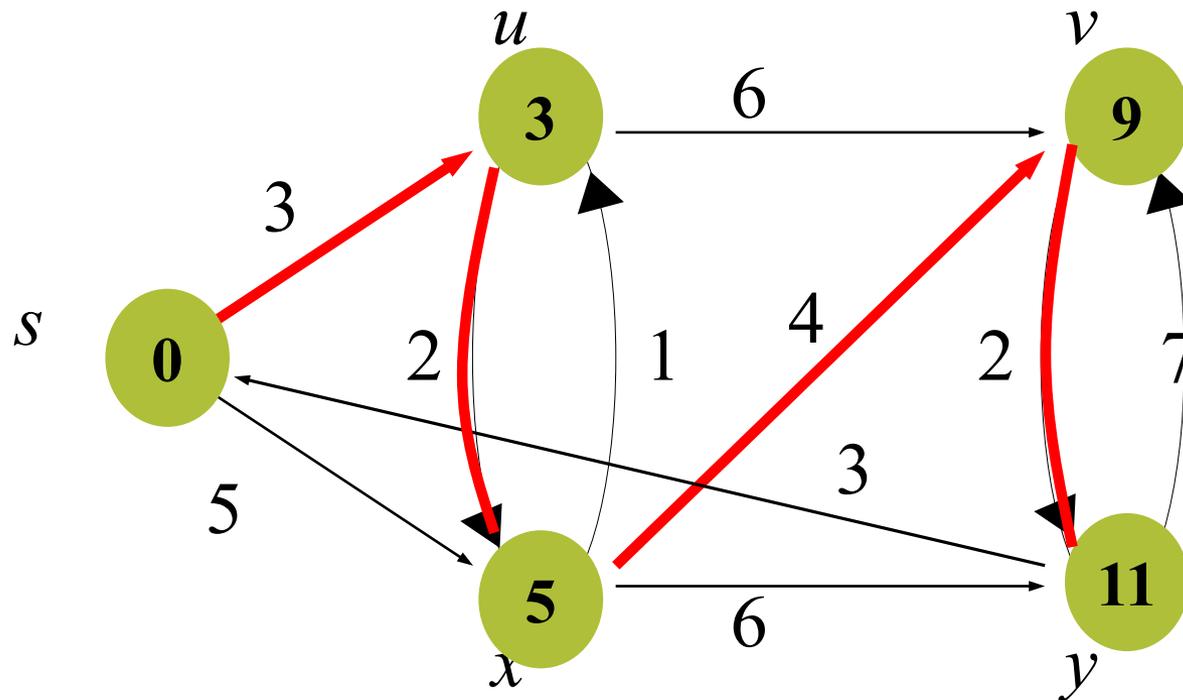
Caminhos mínimos

- Possíveis caminhos



Caminhos mínimos

- Possíveis caminhos



Caminho mínimo

- **Duas abordagens** para caminho mínimo
 - Se grafo **não valorado** (assume-se que cada aresta tem peso 1), busca em largura é uma boa opção
 - Se grafo **valorado**, outros algoritmos são necessários

Caminho mínimo

- Grafo dirigido $G(V,A)$ com função peso $w: A \rightarrow \mathfrak{R}$ que associa pesos às arestas
- Peso (custo) do caminho $p = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$

$$w(p) = \sum_{i=1}^k w(v_{i-1}, v_i)$$

Caminho mínimo

- Grafo dirigido $G(V,A)$ com função peso $w: A \rightarrow \mathbb{R}$ que associa pesos às arestas
- Peso (custo) do caminho $p = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$

$$w(p) = \sum_{i=1}^k w(v_{i-1}, v_i)$$

- Caminho de menor peso entre u e v :

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \min \{w(p) : u \xRightarrow{p} v\} & \text{se } \exists \text{ rota de } u \text{ p/ } v \\ \infty & \text{cc} \end{cases}$$

Caminho mínimo

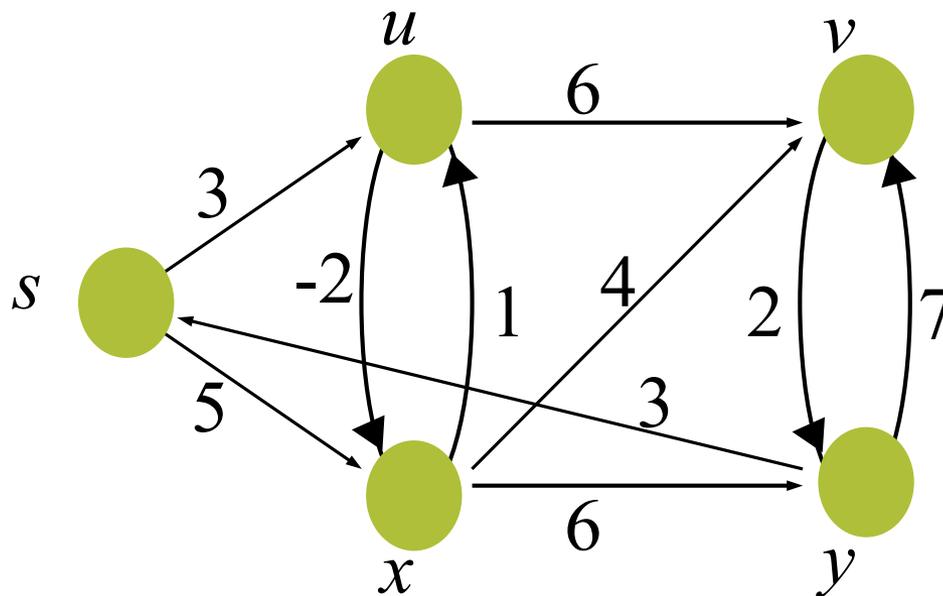
- Menor caminho entre os vértices u e v definido como qualquer rota p com um peso

$$w(p) = \delta(u, v)$$

- Atenção especial com ciclos e pesos negativos

Caminho mínimo

- Qual o menor caminho entre s e v ?



Camino mínimo

- Se há um ciclo positivo no caminho, ele não faz parte do caminho mínimo
 - Por quê?

Exemplo

- Modelagem de transações financeiras, ou investimentos como um grafo
 - Vamos considerar um cenário em que você tem um portfólio de investimentos e deseja otimizar seus retornos considerando os custos associados à compra e venda de ativos

Exemplo

- Cada vértice representa um ativo diferente, como ações, títulos ou commodities. Por exemplo, os vértices podem ser rotulados como "Estoque A", "Título B" e "Commodity C"
- As arestas representam as transações ou negociações entre esses ativos
- Os pesos nas arestas representam os custos ou ganhos associados às transações
 - Pesos positivos podem representar custos de transação, enquanto pesos negativos podem representar ganhos ou lucros.
 - Por exemplo, se você vender uma ação por um preço mais alto do que pagou por ela, o peso da aresta correspondente seria negativo, indicando lucro
- Os caminhos no grafo representariam diferentes estratégias de investimento ou sequências de transações

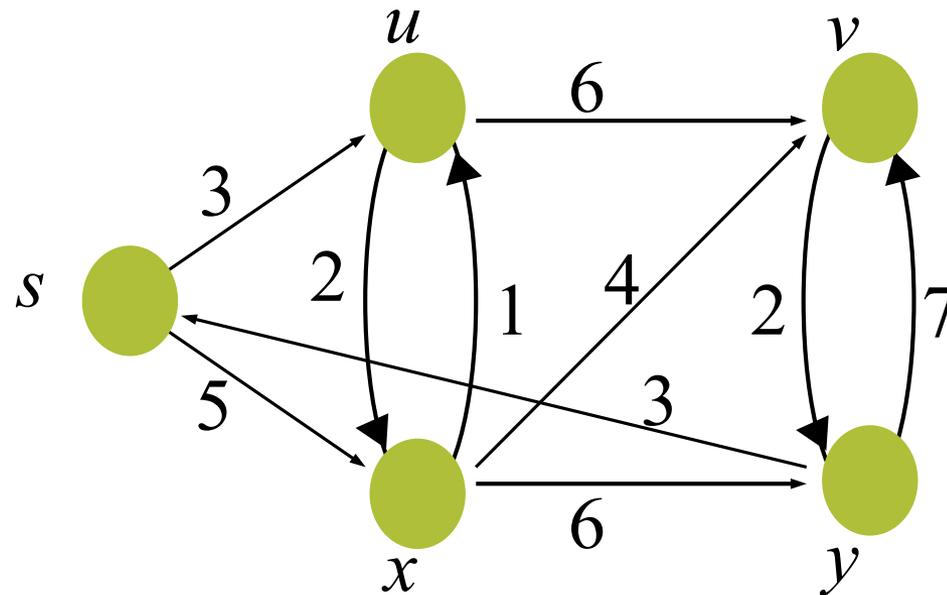
Exemplo

- O objetivo pode ser encontrar o caminho com o maior peso cumulativo, levando em consideração os pesos positivos e negativos: isso ajudaria a identificar a estratégia de investimento mais lucrativa considerando os custos envolvidos
- Ao permitir pesos negativos neste grafo, é possível modelar com precisão o aspecto financeiro dos investimentos, em que ganhos e perdas são fatores essenciais a serem considerados
- Algoritmos de menor caminho em grafos, como o algoritmo de Bellman-Ford ou Floyd-Warshall, permitem encontrar a sequência de transações mais lucrativa ou otimizar uma estratégia de investimento considerando os ganhos e os custos de cada transação

Camino mínimo

- Se há um ciclo positivo no caminho, ele não faz parte do caminho mínimo

□ Por quê?



Caminhos mínimos

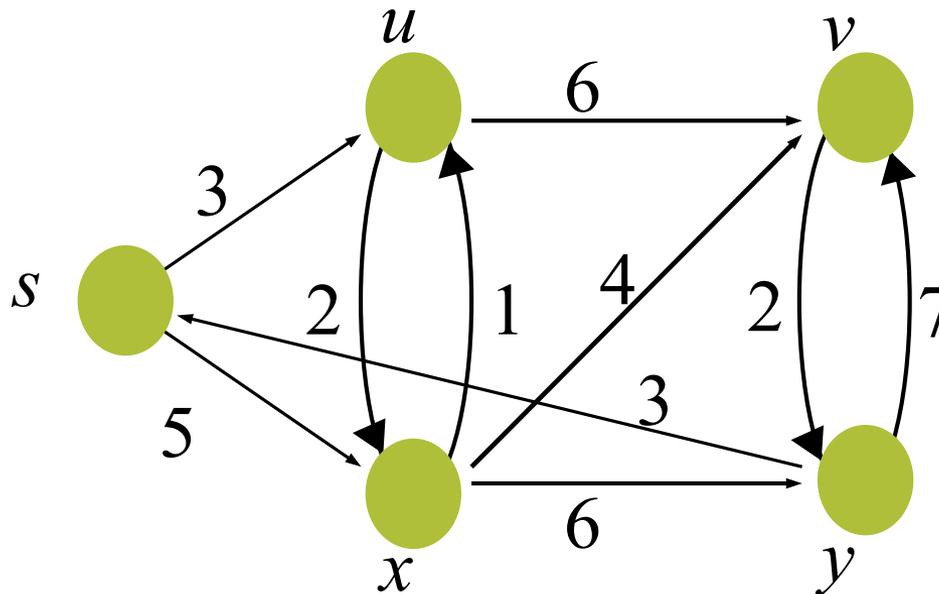
■ Conceitos

- Parte-se do vértice inicial s , associando-se a cada vértice um número $d(v)$ que informa o valor (distância, custo) do menor caminho de s até v
- $d(v)$ mantém a estimativa do custo do menor caminho da origem até o vértice v

Caminhos mínimos

■ Conceitos

- Por exemplo, na figura abaixo, quando chegamos ao vértice v , $d(v)$ será dado por $\min(d(u)+6, d(x)+4, d(y)+7)$



Caminhos mínimos

■ Conceitos

□ *Relaxamento* de arestas

- Faz-se uma estimativa pessimista para o valor do caminho mínimo até cada vértice: $d(v) = \infty$
- O processo de ‘relaxar’ uma aresta consiste em verificar se é possível melhorar essa estimativa pessimista, fazendo um caminho que passa pelo vértice u e pela aresta (u,v)



Caminhos mínimos

■ Conceitos

□ *Relaxamento* de arestas

- Faz-se uma estimativa pessimista para o caminho mínimo até cada vértice: $d(v) = \infty$
- O processo de relaxar uma aresta consiste em verificar se é possível melhorar essa estimativa, fazendo um caminho que passa pelo vértice u e pela aresta (u,v)



Caminhos mínimos

- Sub-rotina para relaxamento de arestas

$\text{relax}(u, v, w)$ // (u, v) é a aresta, w é o seu peso

início

se $d[v] > d[u] + w(u, v)$ **então**

$d[v] = d[u] + w(u, v)$

$\text{antecessor}[v] = u$

fim

Caminhos mínimos

- Sub-rotina para relaxamento de arestas

$\text{relax}(u, v, w)$ // (u,v) é a aresta, w é o seu peso

início

se $d[v] > d[u] + w(u,v)$ **então**

$$d[v] = d[u] + w(u,v)$$

$$\text{antecessor}[v] = u$$

fim



Caminhos mínimos

- Sub-rotina para relaxamento de arestas

$\text{relax}(u, v, w)$ // (u,v) é a aresta, w é o seu peso

início

se $d[v] > d[u] + w(u,v)$ **então**

$$d[v] = d[u] + w(u,v)$$

$$\text{antecessor}[v]=u$$

fim



Caminho mínimo

- Várias possibilidades de caminhos
 - Caminhos mais curtos de origem única
 - Caminhos mais curtos de destino único
 - Caminho mais curto de par único
 - Caminhos mais curtos de todos os pares

Algoritmo de Dijkstra

■ Características

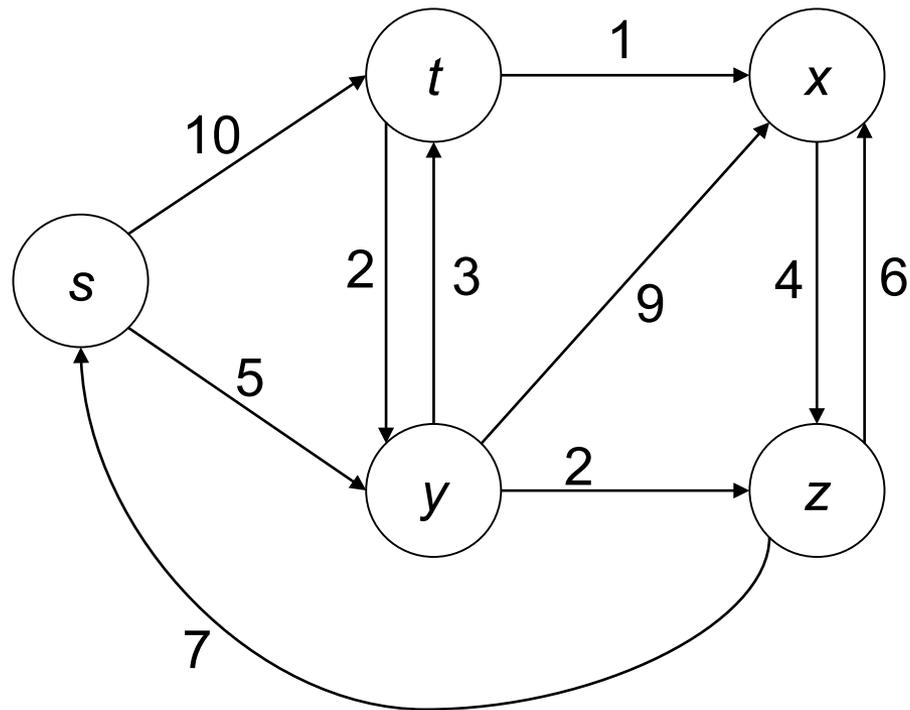
- Caminho mais curto de **origem única**
- Admite **ciclos**
- Só admite **pesos positivos**

■ Método

- Inicia-se com estimativas pessimistas para cada vértice
- A cada passo, adiciona a um conjunto S um vértice u de menor estimativa de caminho mínimo
 - Ao final, S vai conter os vértices do caminho mínimo
 - A cada passo, S contém os vértices cujo caminho mínimo desde a origem já foi definido
- ~~Relaxam-se as arestas adjacentes a u~~

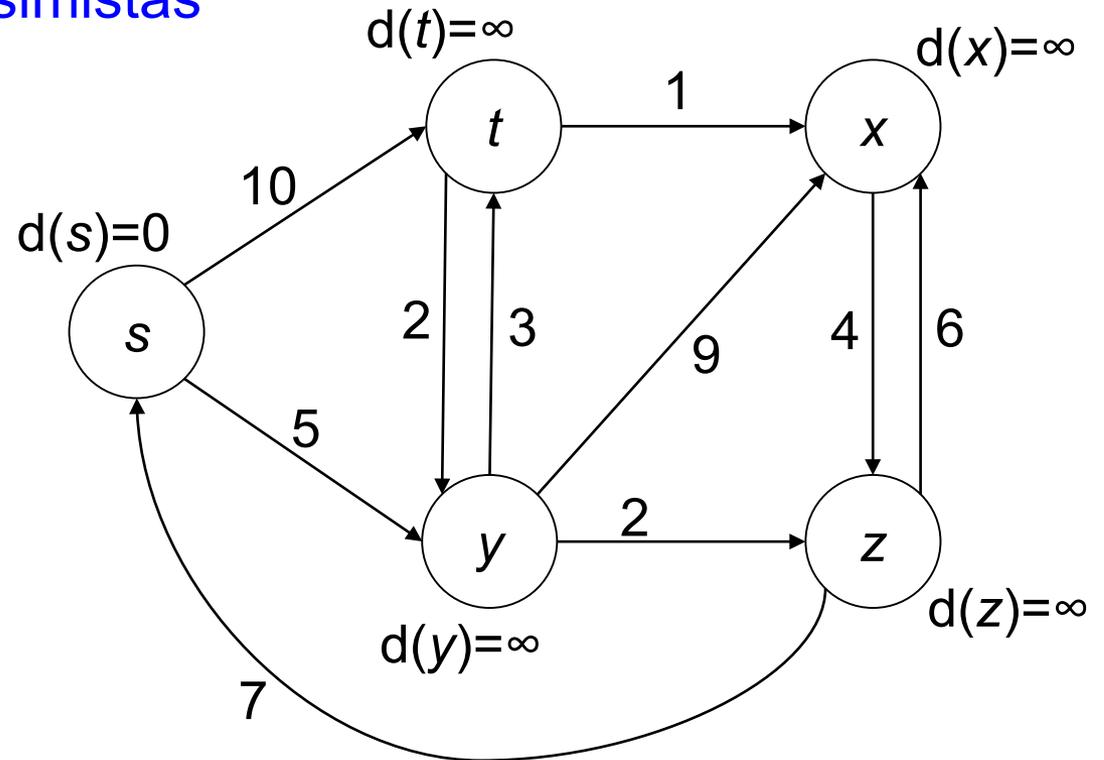
Algoritmo de Dijkstra

- Exemplo (a partir de s)



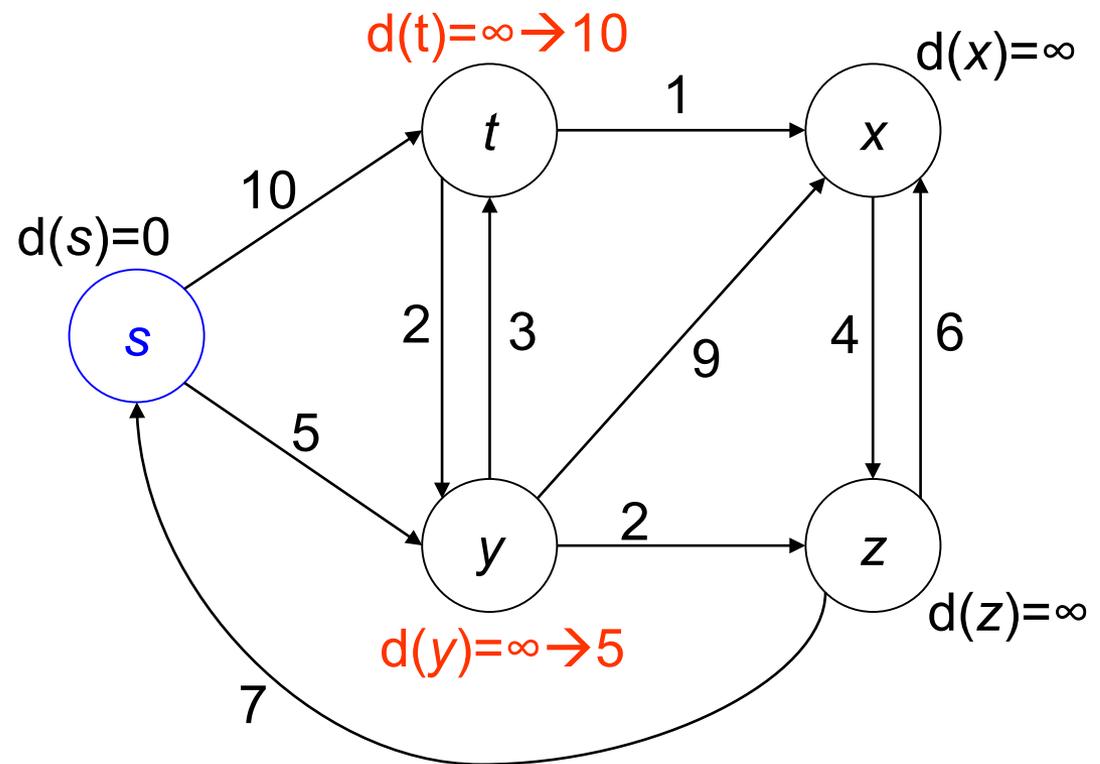
Algoritmo de Dijkstra

- Exemplo (a partir de s)
 - Estimativas pessimistas
 - $S = \emptyset$



Algoritmo de Dijkstra

- Exemplo (a partir de s)
 - Adiciona s a S
 - $S = \{s\}$

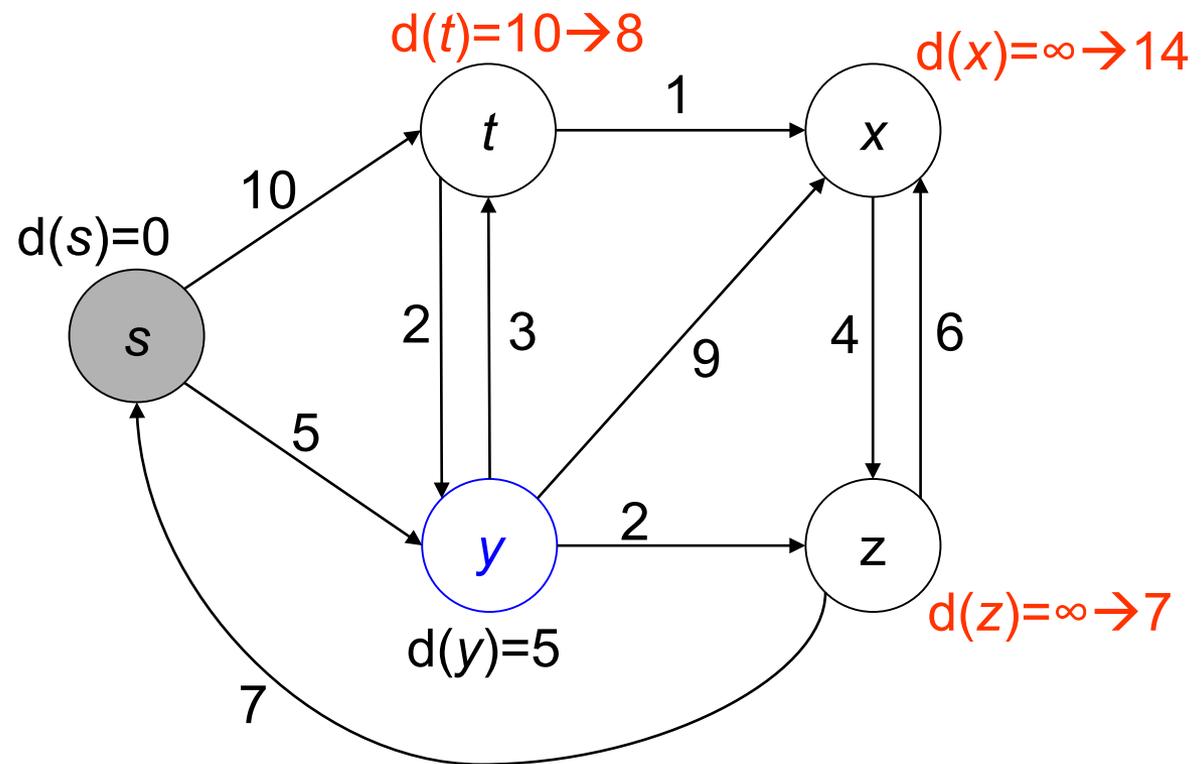


Algoritmo de Dijkstra

- Ejemplo (a partir de s)

- Adiciona y a S

- $S = \{s, y\}$

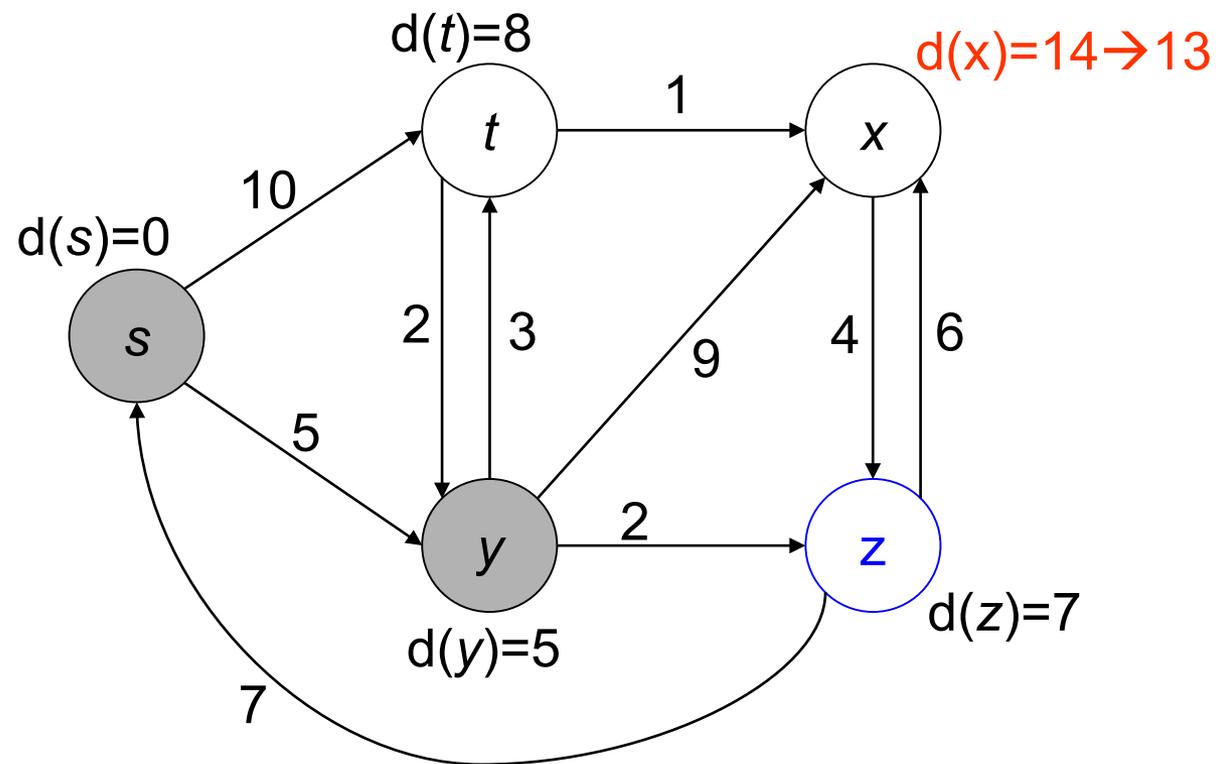


Algoritmo de Dijkstra

- Exemplo (a partir de s)

- Adiciona z a S

- $S = \{s, y, z\}$

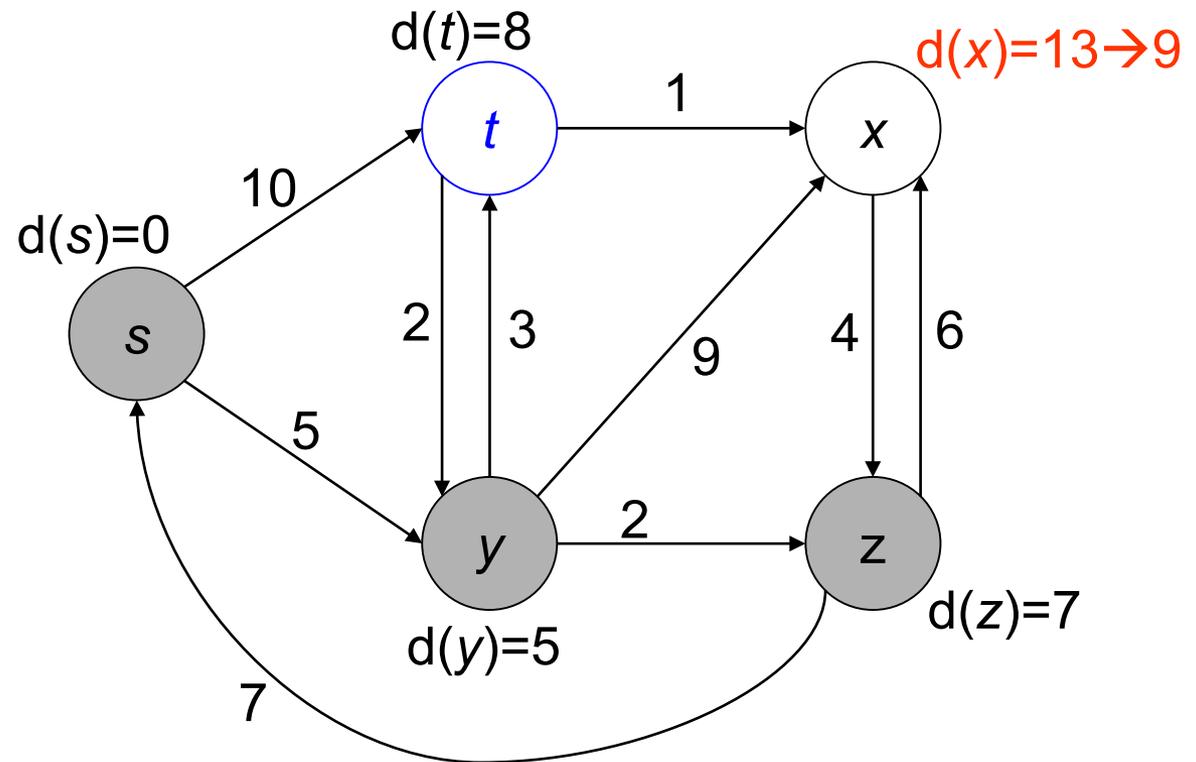


Algoritmo de Dijkstra

- Exemplo (a partir de s)

- Adiciona t a S

- $S = \{s, y, z, t\}$

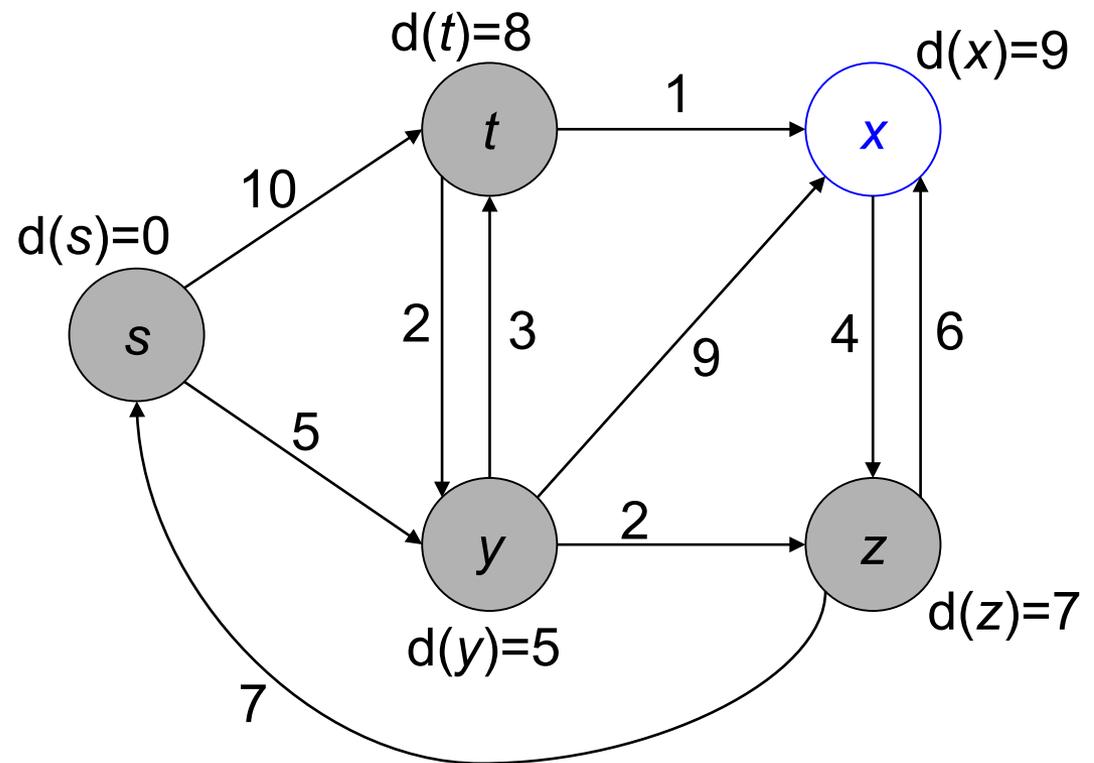


Algoritmo de Dijkstra

- Exemplo (a partir de s)

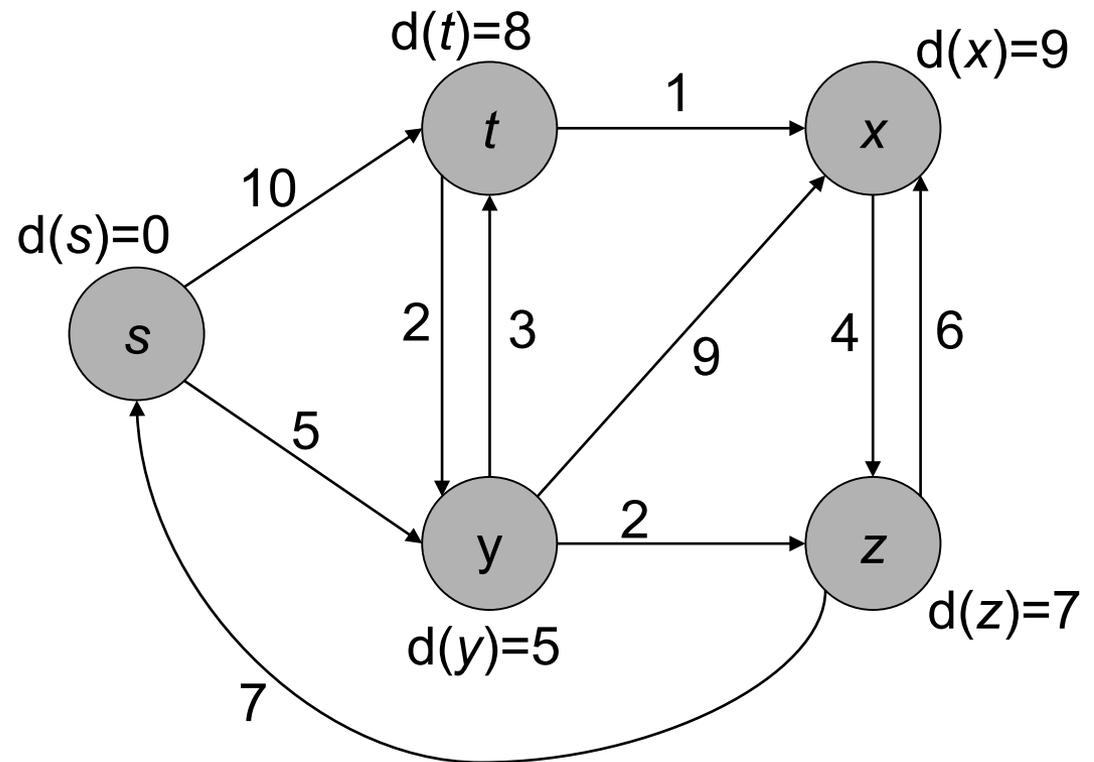
- Adiciona x a S

- $S = \{s, y, z, t, x\}$



Algoritmo de Dijkstra

- Exemplo (a partir de s)
 - $S = \{s, y, z, t, x\}$



Algoritmo de Dijkstra

- Por que funciona? Solução ótima?

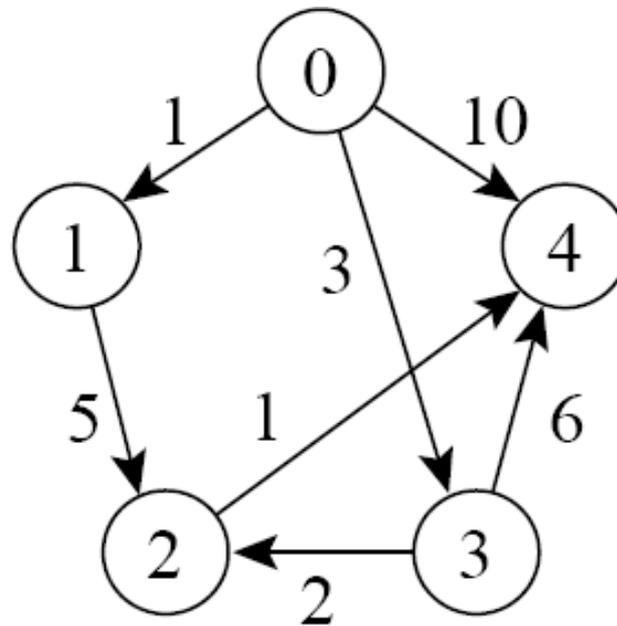
Algoritmo de Dijkstra

- Por que funciona? Solução ótima?
 - Estratégia gulosa
 - Solução ótima, pois sempre busca pelo vértice mais leve
 - Como o algoritmo examina os vértices na ordem de suas distâncias da origem, uma vez que um vértice é processado, sua distância final à origem está determinada e não será reconsiderada

Exercícios

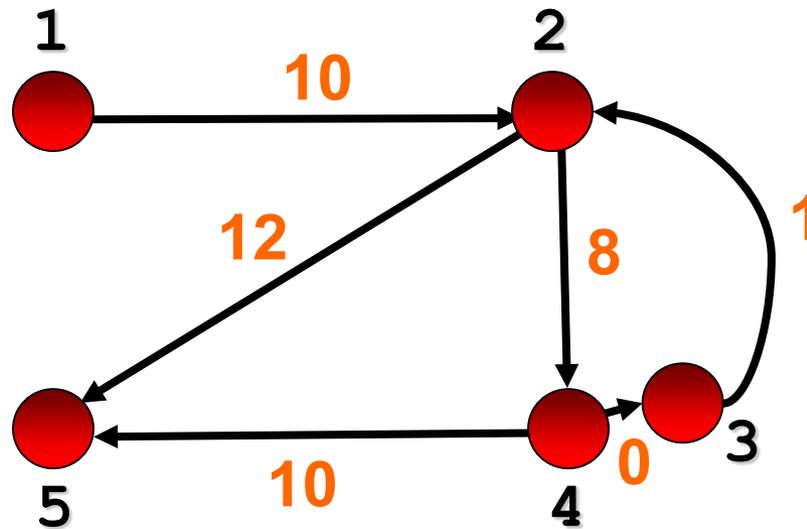
Exercício

- Calcule os caminhos mínimos para o grafo abaixo a partir do vértice 0 aplicando o algoritmo de Dijkstra



Exercício

- Calcule os caminhos mínimos para o grafo abaixo a partir do vértice 1 aplicando o algoritmo de Dijkstra



Algoritmo de Dijkstra

- Como implementar?

Algoritmo de Dijkstra

- Como implementar?
 - Como identificar qual é o vértice com menor estimativa?

Algoritmo de Dijkstra

- Implementação do algoritmo de Dijkstra
 - Insere os vértices em uma **fila de prioridades**, organizada em função da atual estimativa do custo do caminho mínimo

Algoritmo de Dijkstra

DIJKSTRA(G, w, s)

início

//inicializa variáveis

para cada vértice v **faça**

$d[v] = \infty$

$\text{antecessor}[v] = -1$

$d[s] = 0$ // custo do caminho, até o momento

$S = \emptyset$

cria fila de prioridade F com os vértices do grafo

//insere vértice u em S e faz relaxamento a partir das arestas adjacentes a u

enquanto $F \neq \emptyset$ **faça**

$u =$ retira vértice de F

$S = S + \{u\}$

para cada vértice v adjacente a u **faça**

$\text{relax}(u, v, w)$ //atualizando fila de prioridade, se necessário

fim

Algoritmo de Dijkstra

- Complexidade de tempo
 - Depende da estrutura de dados utilizada para manter a fila de prioridade!
 - Implementações costumam usar um *heap* binária
 - (ou uma Fibonacci *heap*)
 - [Heap Visualization \(usfca.edu\)](http://usfca.edu)

Algoritmo de Dijkstra

```
DIJKSTRA(G, w, s) //  $|V|$  vértices e  $|A|$  arestas
início
//inicializa variáveis
para cada vértice  $v$  faça // custo deste laço é  $O(|V|)$ 
     $d[v] = \infty$ 
     $\text{antecessor}[v] = -1$ 
 $d[s] = 0$  //  $s$  vértice inicial
 $S = \emptyset$ 
cria fila de prioridade  $F$  com os  $|V|$  vértices de  $G$  // custo é  $O(|V|\log|V|)$ 
//insere vértice  $u$  em  $S$  e faz relaxamento a partir das arestas
adjacentes a  $u$ 
enquanto  $F \neq \emptyset$  faça // custo deste laço é  $O(|V|)$ 
     $u =$  retira vértice de  $F$  // custo desta operação é  $O(\log(|V|))$ 
     $S = S + \{u\}$ 
    para cada vértice  $v$  adjacente a  $u$  faça // custo total é  $O(|A|)$ 
         $\text{relax}(u, v, w)$  //atualiza fila de prioridade, se necessário,
        custo de cada operação é  $O(\log(|V|))$ 
```

fim

Algoritmo de Dijkstra

- Complexidade de tempo (se fila de prioridade implementada em uma *heap* binária):
 - $O(|V|)$ para inicializar variáveis
 - $O(|V| \cdot \log|V|)$ para criar a fila de prioridade com todos os vértices na *heap binária*
 - $O(|V|)$ para processar cada vértice. Isso requer atualizar a fila de prioridades após a sua remoção, que é $O(\log|V|)$
 - $O(|V| \cdot \log|V|)$, portanto
 - $O(|A|)$ para processar todas as arestas. Mas, para cada relaxamento, precisa atualizar a fila de prioridades, que é $O(\log|V|)$
 - $O(|A| \cdot \log|V|)$, portanto
 - Total: $O(|V|) + O(|V| \cdot \log|V|) + O(|V| \cdot \log|V|) + O(|A| \cdot \log|V|)$

Algoritmo de Dijkstra

- Complexidade de tempo (se fila de prioridade implementada em uma *heap* binária):
- $O(|V|) + O(|V|) + O(|V| \cdot \log|V|) + O(|A| \cdot \log|V|)$
ou seja
- $O((|V| + |A|) \cdot \log|V|)$
ou seja
- $O(|A| \cdot \log|V|)$, no pior caso, se $|A| \gg |V|$

Algoritmo de Dijkstra

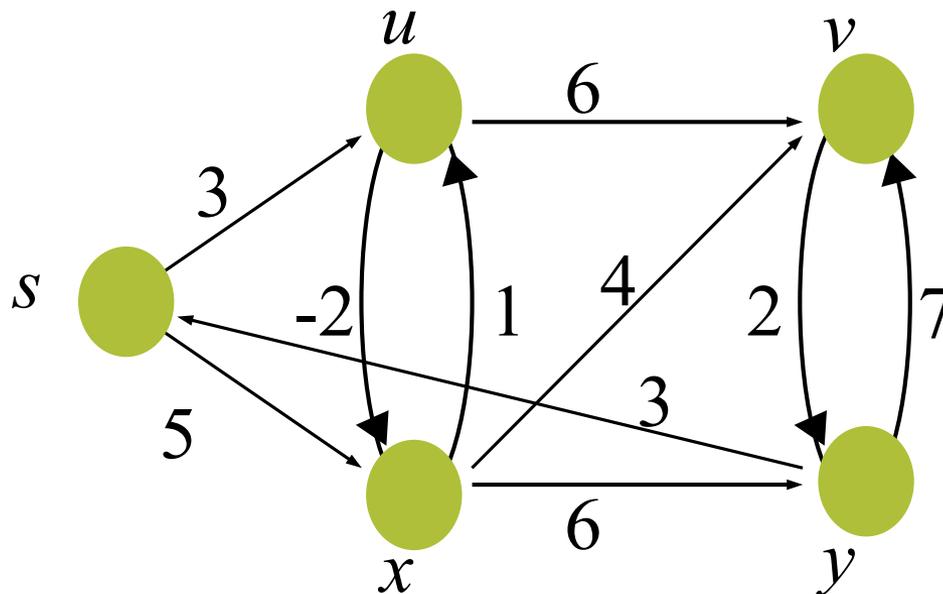
- Complexidade de tempo (se fila de prioridade implementada em uma *heap* binária):
 - $O(|V|)$ para inicializar variáveis
 - $O(|V|)$ para criar a fila de prioridade com todos os vértices na *heap binária*
 - $O(|V|)$ para processar cada vértice. Mas isso inclui atualizar a sua posição na fila de prioridades, que é $O(\log|V|)$
 - $O(|V| \log|V|)$, portanto
 - $O(|A|)$ para processar todas as arestas. Mas, para cada relaxamento, precisa atualizar a fila! Custo de cada operação é $O(\log|V|)$
 - $O(|A| \log|V|)$, portanto
- $O(|V|) + O(|V|) + O(|V| \log|V|) + O(|A| \log|V|)$

Questão

- Como lidar com os demais casos abaixo?
 - ❑ Caminhos mais curtos de origem única → ok
 - ❑ Caminhos mais curtos de destino único?
 - ❑ Caminho mais curto de par único?
 - ❑ Caminhos mais curtos de todos os pares?

Exercício

- Propor algoritmo de caminho mínimo para grafo com ciclo e peso negativo



Questão

- Para pensar
 - Como a busca pelo caminho mínimo pode se beneficiar da ordenação topológica?