SME 0300 – Cálculo Numérico

13 de junho de 2023

Exercícios de estudos para prova 3 (não vale nota, não é para entrega)

1. Exercícios 3.3, 3.5, 3.7 e 3.8 do livro do Quarteroni (página 110, seção 3.8). No exercício 3.8, calcule também a interpolação de Lagrange com nós de Chebyshev.

2. Leia os dados do arquivo `Table31.txt`, do problema 3.1 do livro do Quarteroni (página 77), com o comando

```
D = load("-ascii","Table31.txt")
```

   (a) Escreva a equação matricial na forma $A\widehat{x} = \vec{b}$ que ajusta uma equação polinomial de ordem 4 aos dados carregados utilizando o método dos mínimos quadrados.

   (b) Escreva a solução da equação matricial utilizando as equações normais ($A^T A\widehat{x} = A^T\vec{b}$).

   (c) Escreva a solução da mesma equação matricial utilizando a pseudoinversa de A. Calcule a pseudoinversa utilizando o comando do Matlab/Octave `pinv`.

   (d) Faça um gráfico com os dados e a função polinomial obtida.

3. Sobre a decomposição SVD, onde $A = U\Sigma V^T$, responda

   (a) qual propriedade das matrizes $A^T A$ e AA^T é relevante no cálculo da decomposição SVD? Demonstre essa propriedade para o caso de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ genérica.

   (b) demonstre a relação entre $A^T A$ e as matrizes da decomposição SVD

   (c) demonstre a relação entre AA^T e as matrizes da decomposição SVD

   (d) qual a relação entre os vetores coluna de U e V e as matrizes $A^T A$ e AA^T?

   (e) qual a relação entre os autovalores de $A^T A$ e AA^T e a matriz Σ?

   (f) qual a relação entre a matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de posto k e as k matrizes $\sigma_i\,\vec{u}_i\,\vec{v}_i^T$?

   (g) qual é o posto de cada uma das k matrizes $\sigma_i\,\vec{u}_i\,\vec{v}_i^T$?

4. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de posto n, $m > n$. Demonstre que as equações normais

$$A^T A\widehat{x} = A^T\vec{b}, \tag{1}$$

   que resolvem o método dos mínimos quadrados, são equivalentes ao uso da pseudoinversa de A, $A^+ \in \mathbb{R}^{n\times m}$, na forma

$$\widehat{x} = A^+\vec{b}. \tag{2}$$

   Dica: parta de (1) e chegue em (2) utilizando a decomposição SVD de A e a definição $\Sigma^+\Sigma = I_{n\times n}$.

5. Seja o conjunto de pontos

```
xi = [0.00, 0.06, 0.14, 0.25, 0.31, 0.47, 0.60, 0.70]
yi = [0.00, 0.08, 0.14, 0.20, 0.23, 0.25, 0.28, 0.29]
```

(a) escreva o sistema de equações que representa o ajuste de uma função polinomial de grau 2 ao conjunto de pontos (matriz de Vandermonde)

(b) esse sistema é sub ou superdeterminado?

(c) o sistema de equações normais possui solução única?

(d) utilize o Matlab/Octave para encontrar a solução do problema.

6. No triatlo, o atleta que ficou em primeiro lugar (A1) e o que ficou em segundo lugar (A2) gastou os seguintes tempos em cada uma das provas:

	natação	bicicleta	corrida	tempo total	colocação final
A1	3	3	2	8	1
A2	5	1	3	9	2

Para descobrir qual das 3 provas teve um impacto mais significativo na colocação final entre esses dois atletas, podemos resolver um problema dos mínimos quadrados.

(a) escreva o sistema de equações na forma matricial que representa a solução desse problema.

(b) esse sistema é sub ou superdeterminado?

(c) o sistema de equações normais desse problema possui solução única (sim ou não)?

(d) qual critério é utilizado para escolher uma dentre as infinitas soluções do sistema, quando a pseudoinversa é utilizada?

(e) resolva o sistema utilizando o método da pseudoinversa.