Primitivas e a integral de Riemann
Aula 28

Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

Primeiro Semestre de 2023

Primitivas

Sabemos que a derivada de uma função constante é zero. Entretanto, uma função pode ter derivada zero em todos os pontos de seu domínio e não ser constante; por exemplo $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ é tal que $f'(x) = 0$ em todo ponto de seu domínio, mas não é constante.

No entanto vale o seguinte resultado

Corolário

Se f for contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) e $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f será constante.

Prova: Seja $x_0 \in [a, b]$ fixo. Para todo $x \in [a, b]$, $x \neq x_0$, pelo Teorema do Valor Médio existe um $\bar{x}$ pertence ao intervalo aberto de extremos x e x_0 tal que

$$f(x) - f(x_0) = f'(\bar{x})(x - x_0).$$

Como $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, temos que $f'(\bar{x}) = 0$, logo

$$f(x) - f(x_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = f(x_0)$$

para todo $x \in [a, b]$. Portanto, f é constante. $\square$

Corolário

Duas funções $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ tais que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$ diferem por uma constante.

Definição

Uma **primitiva** *ou* **anti-derivada** *de f definida em um intervalo I é uma função derivável F definida em I tal que*

$$F'(x) = f(x), \quad \textit{para todo } x \in I\,.$$

Observação: Se F for uma primitiva de f, então F será contínua, pois F é derivável. Duas primitivas de uma função definida em um intervalo diferem por uma constante.

Segue que as primitivas de f são da forma $F(x) + k$, com k constante. Denotamos por

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k, \quad k \text{ constante}$$

à *família* de primitivas ou **integral indefinida de f**.

Exemplo

$$\int x^2\;dx = \frac{x^3}{3} + k, \qquad \int\; dx = \int 1\;dx = x + k.$$

Das fórmulas de derivação já vistas seguem as seguintes primitivas

(a) $\displaystyle\int c\,dx = cx + k;$

(b) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + k;$

(c) $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k,\ \alpha \neq -1;$

(d) $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + k;$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) + k,\ \ x > 0;$

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x) + k,\ \ x < 0;$

(g) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + k;$

(h) $\displaystyle\int \sec^2(x)\,dx = \tan(x) + k;$

(i) $\displaystyle\int \sec(x)\tan(x)\,dx = \sec(x) + k;$

(j) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + k;$

(k) $\displaystyle\int \sec(x)dx = \ln|\sec(x) + \tan(x)| + k;$

(l) $\displaystyle\int \tan(x)\,dx = \ln|\sec(x)| + k;$

(m) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(x) + k.$

Algumas regras elementares

Sejam c uma constante, f e g funções que têm primitas. Então:

$$\int \Big(f(x)+g(x)\Big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int \Big(f(x)-g(x)\Big)dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

Mudança de Variável ou Regra da Substituição

Sejam f e g tais que $Im(g) \subset D_f$. Suponhamos que F seja uma primitiva de f.

Então $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x))g'(x)$, de fato, pela Regra da Cadeia,

$$[F(g(x))]' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Portanto,

$$\int f(g(x))g'(x)\, dx = F(g(x)) + k\,,$$

onde k é uma constante arbitrária.

Se fizermos a *mudança de variável* ou *substituição* $u = g(x)$ temos

$$\begin{aligned} \int F'(g(x))g'(x)\ dx &= \int [F(g(x))]'\ dx = F(g(x)) + k \\ &= F(u) + k = \int F'(u)\,du \end{aligned}$$

ou, escrevendo $F' = f$, obtemos a **Regra da Substituição**:

$$\boxed{\int f(g(x))g'(x)\ dx = \int f(u)\ du, \text{ com } u = g(x)} \qquad (1)$$

$$u = g(x) \Rightarrow du = g'(x)dx$$

Exemplo

Encontre $\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$.

Fazemos a substituição $u = 1 + x^2$, então sua diferencial é $du = 2xdx$. Pela Regra da Substituição,

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{1+x^2}\;2x\,dx = \int \sqrt{u}\,du$$
$$= \frac{2}{3}u^{3/2} + k = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} + k.$$

Exemplo

Encontre $\int x^3 \cos(x^4 + 2)\, dx.$

Fazemos a substituição $u = x^4 + 2$, então $du = 4x^3\, dx$ e

$$\begin{aligned}\int x^3 \cos(x^4 + 2)\, dx &= \int \cos(u)\frac{1}{4}\, du = \frac{1}{4}\int \cos(u)\, du \\ &= \frac{1}{4}\mathrm{sen}(u) + k = \frac{1}{4}\mathrm{sen}(x^4 + 2) + k.\end{aligned}$$

Exemplo

Calcule $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\, dx.$

Se fizermos $u = x^2$, teremos $du = 2x\, dx$, assim,

$$\int \frac{x}{1+x^4}\, dx = \int \frac{1}{1+u^2}\frac{1}{2}\, du = \frac{1}{2}\mathrm{arctan}(u) + k = \frac{1}{2}\mathrm{arctan}(x^2) + k.$$

Exemplo

Encontre $\int \tan(x)\,dx$.

Fazemos a substituição $u = \cos(x)$, então sua diferencial é $du = -\operatorname{sen}(x)\,dx$; portanto

$$\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\,dx = -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + k$$
$$= -\ln|\cos(x)| + k = \ln|\sec(x)| + k.$$

Integração por Partes

Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenciáveis em (a, b). Então, para cada $x \in (a, b)$, vale

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

ou seja,

$$f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]' - f'(x)g(x)\,.$$

Como $f(x)g(x)$ é uma primitiva de $[f(x)g(x)]'$, se existir uma primitiva de $f'(x)g(x)$, então também existirá uma primitiva de $f(x)g'(x)$ e valerá a **fórmula de integração por partes**:

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx\,.} \tag{2}$$

Notação alternativa. Tomando $u = f(x)$ e $v = g(x)$, temos

$$du = f'(x)\,dx \quad \text{e} \quad dv = g'(x)\,dx$$

e podemos reescrever (2) como

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du\,.}$$

Exemplo

Calcule $\int x \operatorname{sen}(x)\, dx.$

Suponha $f(x) = x$ e $g'(x) = \operatorname{sen}(x)$. Então, $f'(x) = 1$ e $g(x) = -\cos(x)$. Assim

$$\int x \operatorname{sen}(x)\, dx = x(-\cos(x)) - \int 1(-\cos(x))\, dx = -x \cos(x) + \operatorname{sen}(x) + k.$$

Exemplo

$$\int \underbrace{\arctan(x)}_{u}\,\underbrace{1\,dx}_{dv} = (\arctan(x))\,x - \int x\,\frac{1}{1+x^2}\,dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + k$$

Exemplo

$$\int \underbrace{x^2}_{f}\,\underbrace{e^x}_{g'}\,dx = \underbrace{x^2}_{f}\,\underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{2x}_{f'}\,\underbrace{e^x}_{g}\,dx.$$

Integrando por partes mais uma vez, obtemos

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + k$$

Portanto,

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + k$$

A Integral de Riemann

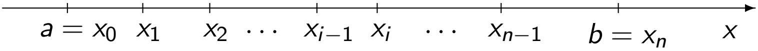
Definição

Seja $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *um intervalo limitado e fechado. Dizemos que*

$$P: \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \ ,$$

onde $n \in \mathbb{N}$*, é uma* **partição** *ou* **divisão** *de* $[a, b]$*.*

Uma partição P de $[a, b]$ divide o intervalo em n intervalos.



Para cada $i = 1, \ldots, n$, definimos

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

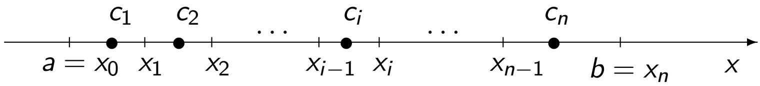
que é o "tamanho" ou comprimento do intervalo $[x_{i-1}\,,\,x_i]$.

Definimos, também a "malha da partição P"

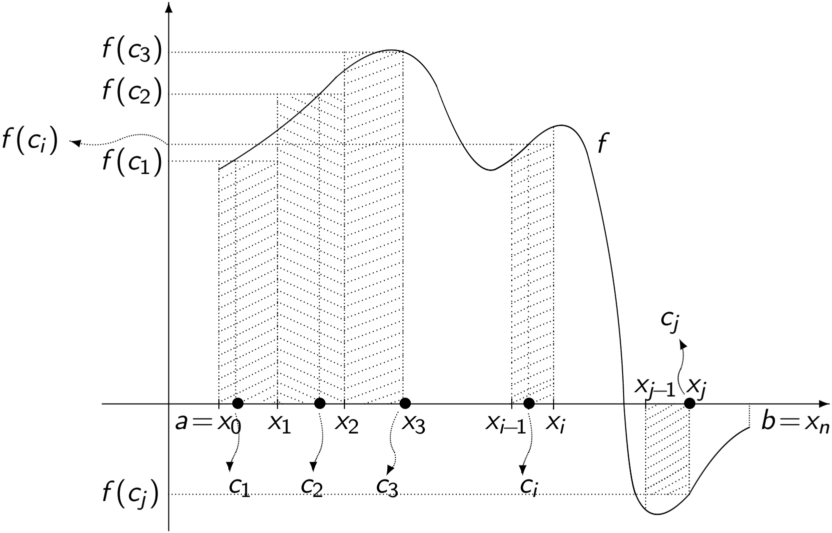
$$\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$$

que é o maior dos comprimentos dos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$.

Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots, x_{n-1}, x_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$. Para cada índice i seja c_i um número em $[x_{i-1}, x_i]$ escolhido arbitrariamente.



Consideremos a figura seguinte.



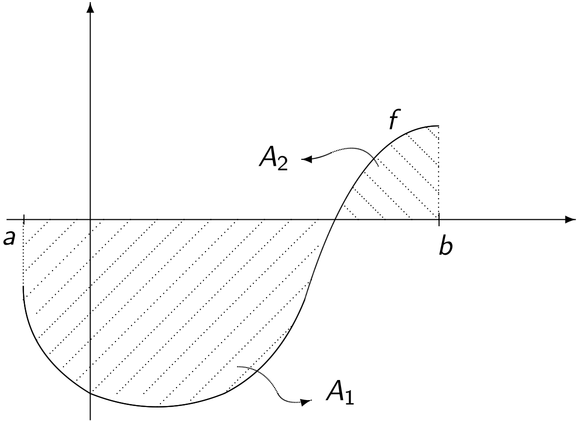
Definição

A **soma de Riemann** *de f relativamente à partição P é dada por*

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.}$$

Observação: Note que a soma de Riemann é igual à soma das áreas dos retângulos que estão acima do eixo x menos a soma das áreas dos retângulos que estão abaixo do eixo x. Portanto a soma de Riemann é a diferença entre a soma das áreas dos retângulos que estão acima do eixo x e a soma das áreas dos retângulos que estão abaixo do eixo x.

Consideremos a figura seguinte.



Sejam f uma função contínua definida em $[a, b]$ e $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots, x_{n-1}, x_n = b\}$ uma partição tal que $\|P\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$ seja suficientemente pequeno. Então a "área" $A = A_2 - A_1$, "pode ser aproximada pela soma de Riemann"

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$

ou seja, $A \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$. Fazendo $\|P\| \longrightarrow 0$, temos

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \ \longrightarrow \ A$$

e, portanto,

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = A.$$

Então podemos dar a definição seguinte.

Definição

Diremos que uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é* **Riemann integrável** *ou simplesmente* **integrável**, *se existir um número* $A \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\boxed{\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = A}$$

onde $P = \{a = x_0 < x_1, \cdots, x_{n-1} < x_n = b\}$ *é uma partição de* $[a, b]$ *e* $c_i \in [x_{i-1}\,,\, x_i]$.

Escrevendo o limite acima com ε's e δ's temos

Definição

Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *será dita* **integrável**, *se existir* $A \in \mathbb{R}$ *tal que para todo* $\varepsilon > 0$, *exista* $\delta > 0$ *tal que*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - A \right| < \varepsilon$$

para toda partição de $[a, b]$ *com* $\|P\| < \delta$, *qualquer que seja a escolha de* $c_i \in [x_{i-1}\,,\, x_i]$. *Neste caso, escrevemos*

$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

que é chamada **integral definida** *ou simplesmente* **integral** *de* f *em relação à* x *no intervalo* $[a, b]$.

Observação: Note que, o limite independe da escolha dos c_i.

Quadratura da parábola

Exemplo

Use soma de Riemann para mostrar que a área "entre a parábola $y = x^2$, o eixo x e as retas $x = 0$ e $x = 1$" é o dobro da área "entre a reta $y = 1$, a parábola $y = x^2$ e as retas $x = 0$ e $x = 1$".

Dicas: Use retângulos aproximantes com alturas do lado direito de cada retângulo aproximante e também a fórmula

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$