

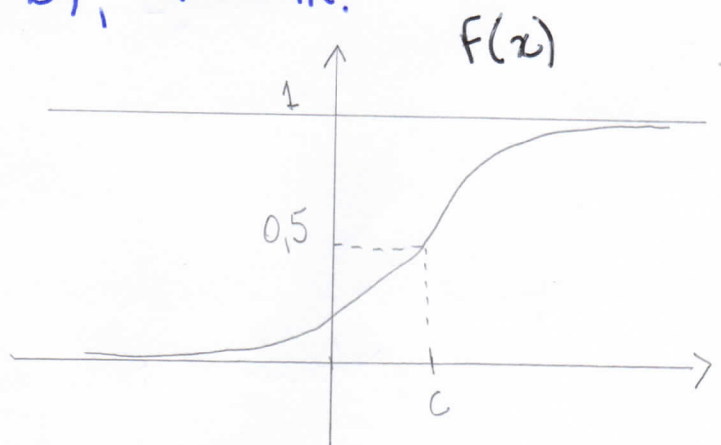
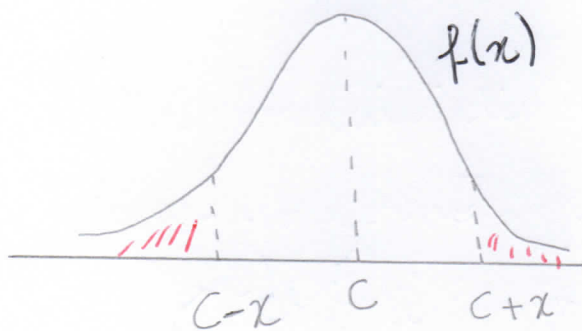
Testes baseados em Postos

1- Teste dos Postos Sinalizados de Wilcoxon

Teste para $\begin{cases} \text{uma única amostra} \\ \text{uma amostra de dados pareados} \end{cases}$

Similar ao teste do sinal, com a suposição adicional de simetria.

Def: A v.a. X é simétrica em torno do ponto c se $P(X \leq c-x) = P(X \geq c+x), \forall x \in \mathbb{R}$.



Devido à simetria, qualquer inferência feita para a mediana é válida para a média.

a) Teste de Wilcoxon para uma amostra de dados emparelhados

Dados: n' observações (x_1, y_1) (x_2, y_2) ... $(x_{n'}, y_{n'})$
das v.a. bivariadas (X_i, Y_i) .

Calcula-se $|D_i| = |Y_i - X_i|$ $i = 1, 2, \dots, n'$

Omitimos da análise os pares nos quais $D_i = 0$.
Seja $n \leq n'$ o número de pares restantes.

Posto 1 $\rightarrow$ par com menor valor de $|D_i|$

$\vdots$

Posto $n \rightarrow$ par com maior valor de $|D_i|$

Obs: Se vários pares tiverem o mesmo valor de $|D_i|$,
utiliza-se postos médios.

		Posto
Ex: $(3, 5) \rightarrow D_1 = 5 - 3 = 2$	$ D_1 = 2$	2,5
$(8, 3) \rightarrow D_2 = 3 - 8 = -5$	$ D_2 = 5$	4
$(10, 11) \rightarrow D_3 = 11 - 10 = 1$	$ D_3 = 1$	1
$(10, 12) \rightarrow D_4 = 12 - 10 = 2$	$ D_4 = 2$	2,5

Suposições

- 1- A distribuição dos D_i é simétrica.
- 2- As variáveis aleatórias D_i , $i = 1, 2, \dots, n$ são independentes e têm a mesma mediana.
- 3- A escala de medidas dos D_i é intervalar.

Teste de Wilcoxon

- 1) Testar se uma população tem certa mediana.
- 2) Testar se há igualdade de médias ou medianas ao se aplicar um tratamento antes ou depois.

Seja $d_{0,5}$ a mediana da variável $D = Y - X$.

Teste bicaudal

$$H_0: d_{0,5} = 0$$

$$H_a: d_{0,5} \neq 0$$

$$R_i = \begin{cases} 0 & \text{se } X_i > Y_i \quad (D_i < 0) \\ \text{Poso}(|D_i|) & \text{se } X_i < Y_i \quad (D_i > 0) \end{cases}$$

Estatística do Teste:

$$T = \sum_{i=1}^n R_i = \sum (R_i \text{ para } D_i \text{ positivos})$$

Soma-se somente os postos dos pares nos quais $D_i > 0$.

Regra de Decisão:

Rejeita-se H_0 ao nível α se $T > W_{1-\alpha/2}$ ou $T < W_{\alpha/2}$,

onde $W_{1-\alpha/2}$ e $W_{\alpha/2}$ são os quantis da estatística

de Wilcoxon, Tabela A.12 - Conover 3^a edição

Tabelas A.13 - 2^a edição e Tabela 7 - 1^a edição.

Tabelas $n = 4, 5, \dots, 50$

$$\text{e para } p > 0,5 \quad w_p = \frac{n(n+1)}{2} - w_{1-p}$$

Para $n > 20$, w_p pode ser aproximado por

$$w_p = \frac{n(n+1)}{4} + z_p \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}$$

onde z_p é o quantil de ordem p da dist. $N(0,1)$.

Teste Unicaudal à direita

$$H_0: d_{0,5} \leq 0$$

$H_a: d_{0,5} > 0$ (os valores de Y tendem a ser maiores que os de X)

$$RC: T > w_{1-\alpha}$$

Teste Unicaudal à esquerda

$$H_0: d_{0,5} \geq 0$$

$$H_a: d_{0,5} < 0$$

$$RC: T < w_\alpha$$

Exemplo

Tomou-se uma amostra de 20 motoristas para verificar se a ingestão de bebidas alcoólicas afetava o tempo de reação.

X - tempo de reação antes da bebida

Y - tempo de reação depois da bebida

ind.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	0,68	0,64	0,68	0,82	0,58	0,80	0,72	0,65	0,84	0,73
Y	0,73	0,62	0,66	0,92	0,68	0,87	0,77	0,70	0,88	0,79
D_i	0,05	-0,02	-0,02	0,10	0,10	0,07	0,05	0,05	0,04	0,06
Pos (D_i)	10	5	5	16,5	16,5	13,5	10	10	8	12
R_i	10	0	0	16,5	16,5	13,5	10	10	8	12

ind.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	0,65	0,59	0,78	0,67	0,65	0,76	0,61	0,86	0,74	0,88
Y	0,72	0,60	0,78	0,66	0,68	0,77	0,72	0,86	0,72	0,97
D_i	0,07	0,01	0	-0,01	0,03	0,01	0,11	0	-0,02	0,09
Pos (D_i)	13,5	2	-	2	7	2	18	-	5	15
R_i	13,5	2	-	0	7	2	18	-	0	15

Os dados sugerem que o álcool afeta a mediana do tempo de reação?

$d_{0,5}$ - mediana de $Y-X$

$$H_0: d_{0,5} \leq 0$$

$$H_a: d_{0,5} > 0$$

$$T = \sum_{i=1}^{20} R_i = 154 \quad n=18 \quad \alpha=0,05$$

$$w_{1-\alpha} = w_{0,95} \quad p=0,95 > 0,5 \Rightarrow w_p = \frac{n(n+1)}{2} - w_{1-p}$$

$$\therefore w_{0,95} = 171 - w_{0,05} = 171 - 48 = 123$$

$$RC: T > 123$$

$$T_{obs} = 154 > 123, \text{ rejeita-se } H_0$$

Os dados sugerem que o consumo de álcool tende a aumentar a mediana do tempo de reação.

Obs: Neste exemplo, poderia ser aplicado o teste do sinal, mas, no teste do sinal, não seriam avaliadas a magnitude das diferenças entre Y e X . Assim, neste caso, o teste de Wilcoxon é mais eficiente.

b) Teste de Wilcoxon para a mediana

Dados: $X_1, X_2, \dots, X_n$ amostra aleatória da v.a. X

m - constante especificada

$x_{0,5}$ - mediana da v.a. X

$$H_0: x_{0,5} = m$$

$$H_0: x_{0,5} \leq m$$

$$H_0: x_{0,5} \geq m$$

$$H_a: x_{0,5} \neq m$$

$$H_a: x_{0,5} > m$$

$$H_a: x_{0,5} < m$$

$$RC: T < W$$

$$RC: T > W$$

Forma-se os pares (X_1, m) (X_2, m) $\dots$ (X_n, m) e utiliza-se o teste de Wilcoxon da forma anterior.

$$D = m - X \quad D \text{ simétrica} \Leftrightarrow X \text{ é simétrica}$$

Exemplo

Um comerciante quer verificar se o número mediano de itens comprados em seu armazém pode ser considerado igual a 10 e para isto observa uma amostra de 12 frequências obtendo os valores

22 9 4 5 1 16 15 26 47 8 31 7.

Testar a hipótese do comerciante.

$$H_0: \mu_{0,5} = 10$$

$$H_a: \mu_{0,5} \neq 10$$

X_i	22	9	4	5	1	16	15	26	47	8	31	7
$D_i = 10 - X_i$	-12	1	6	5	9	-6	-5	-16	-37	2	-21	3
$\text{Rango}(D_i)$	9	1	6,5	4,5	8	6,5	4,5	10	12	2	11	3
R_i	0	1	6,5	4,5	8	0	0	0	0	2	0	3

$$T = 25 \quad \alpha = 0,05$$

$$w_{0,025} = 14 \quad w_{0,975} = \frac{n(n+1)}{2} - w_{0,025} = \frac{12(12+1)}{2} - w_{0,025}$$

$$= 78 - 14 = 64$$

$$RC: T < 14 \quad \text{ou} \quad T > 64.$$

$$T = 25 \notin RC. \text{ Não rejeitamos } H_0.$$