EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS (EDO)

MAP 3121 JULHO DE 2021

AULA 2

ANDRÉ SALLES DE CARVALHO

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EDO

- Queremos resolver a EDO

$$\boxed{y' = f(t,y)}$$

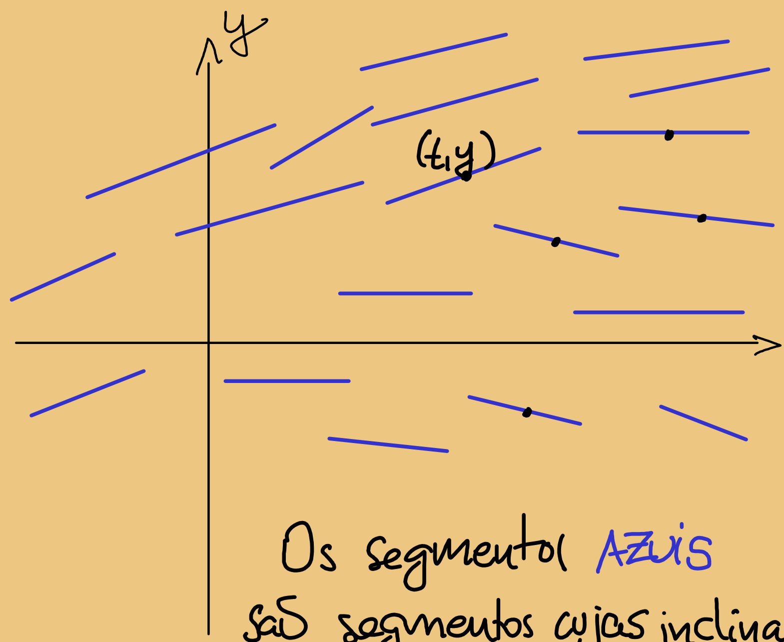
onde $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função dada.

- Mais especificamente, queremos resolver o P.V.I.

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

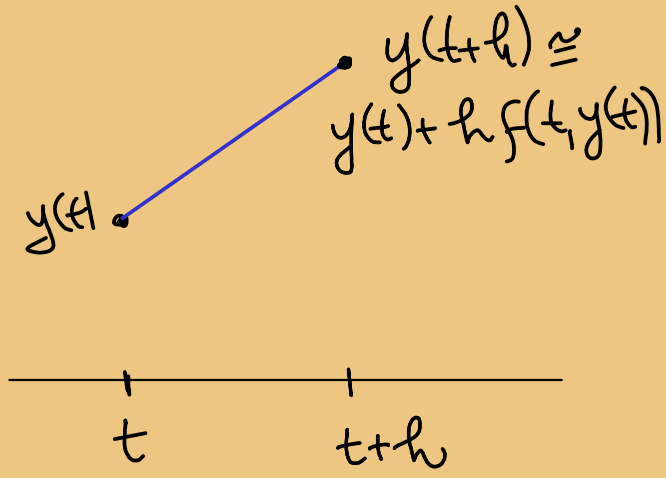
para a e α dados.

- Lembre-se que pensamos em $f(t,x)$ como um campo de inclinações



Os segmentos AZUIS são segmentos cujas inclinações são $f(t,x)$

- Mas se sabemos a inclinação da reta tangente ao gráfico em cada ponto, podemos usar essa informação para encontrar uma APROXIMAÇÃO POLIGONAL desse gráfico.



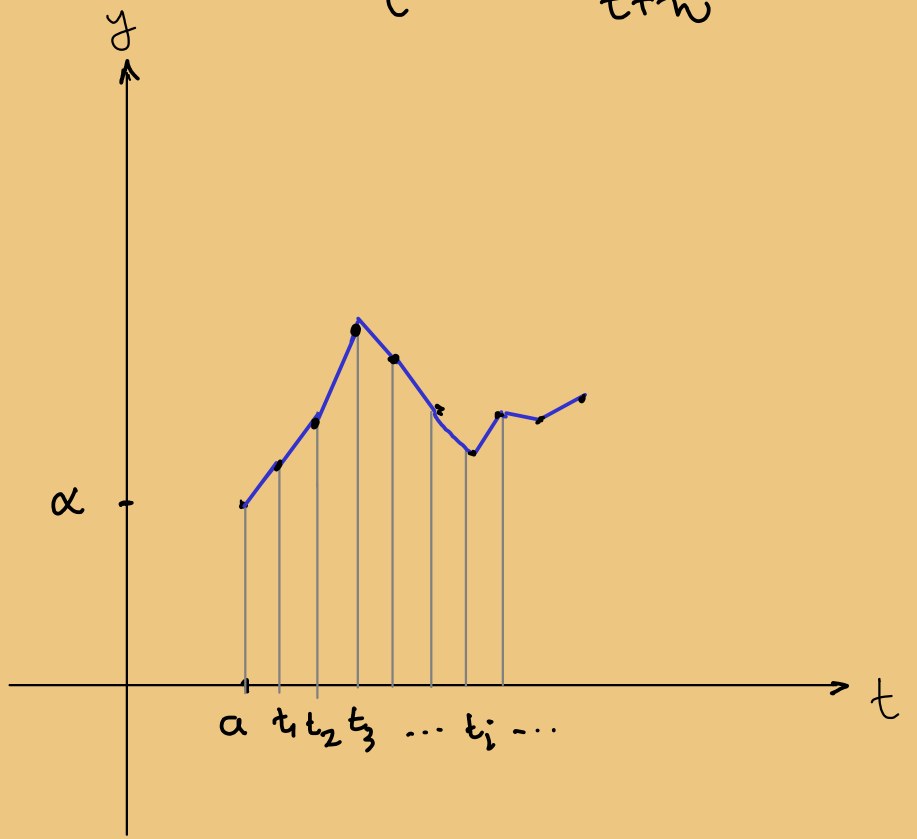
- $y'(t) = \underline{f(t,y)}$ é a EDO que queremos resolver.

- $$y'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

Juntando as duas:

$$y(t+h) \cong y(t) + h f(t, y(t))$$

aproximadamente igual para h pequeno.



O Método de Euler

A discussão acima leva ao método de aproximações de soluções chamado **Método de Euler**.

Para resolver, no intervalo $t \in [a,b]$,

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

onde f, a, α são dados, escolhemos um número $\underline{\underline{n}}$ de passos, definimos $h = \dfrac{b-a}{n}$ e

$t_0 = a$, $t_1 = t_0 + h = a + h$, $t_2 = t_1 + h = a + 2h$, $\ldots$ $t_i = a + ih$, $\ldots$, $t_n = a + nh = b$.

- $y_0 = \alpha$
- $y_1 = y_0 + h f(t_0, y_0)$
  $= \alpha + h f(a, \alpha)$
- $y_2 = y_1 + h f(t_1, y_1)$

  $\vdots \qquad\qquad \vdots$
- $\boxed{y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i)}$

  $\vdots$
- $y_n = y_{n-1} + h f(t_{n-1}, y_{n-1})$

Ex 1 $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\boxed{y(t) = e^t}$ Vejamos o que o Método de Euler nos dá no intervalo $[0,1]$. Tomando $h = \frac{1}{n}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\underline{\text{Cola}}}\text{: Euler diz} \\ y_0 = \alpha \\ y_{i+1} = y_i + h\, f(t_i, y_i) \end{array}}$$

Nesse caso

$$[a,b] = [0,1] \quad , \quad h = 1/n \quad , \quad \underline{f(t,y) = f(y) = y}$$

$$y_0 = 1$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{n} f(y_0) = y_0 + \frac{1}{n} \cdot y_0 = \left(1 + \frac{1}{n}\right) y_0$$

$t_i = a + i.h$ $\qquad h = \frac{b-a}{n}$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{n} f(y_1) = y_1 + \frac{1}{n} y_1 = y_1 \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{n} f(y_i) = y_i + \frac{1}{n} y_i = y_i \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^i$$

$$\vdots$$

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$\longleftarrow$ Lembre-se, do Cálculo, que o limite dessa seqüência, para $n \to \infty$, é $\underline{e}$?

Assim, para várias escolhas de n, obtemos as seguintes aproximações para o valor de $y(1)$ do P.V.I. $y'=y$, $y(0)=1$.

h	n	$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	$\lvert \text{Erro} \rvert = \lvert y_n - e \rvert$
$1/10$	10	2,593743	0.124539
$1/100$	100	2,704814	0.013468
$1/1000$	1.000	2,716924	0.0013579
$1/10^4$	10.000	2,718146	0.0001358
$1/10^5$	100.000	2,718268	0.0000136

Cola

A solução de $y'=y$, $y(0)=1$ é $y(t)=e^t$

Note que o erro é comparável com o tamanho do passo:

$$\text{Erro} \approx \frac{1}{n} = h$$

Método de Euler é um método de ORDEM 1

Um método de ordem 2

- Vejamos agora o Método de Euler Modificado, que é de ordem 2, isto é, o erro é comparável com h^2, onde h é o tamanho do passo.
- Observamos acima que o Método de Euler é de ordem 1, isto é, o erro é comparável com h.
- Observação importantíssima: se h é muito pequeno, então h^2 é minúsculo.

Método de Euler Modificado

$$y_0 = \alpha$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \overbrace{y_i + h f(t_i, y_i)}^{\substack{y_{i+1}^{euler} \\ \text{Euler (simples)}}})\right)$$

Cola: Euler

$$y_0 = \alpha$$

$$y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i)$$

- Explicaremos mais tarde como obtivemos. Mas observe que o segundo termo é

(uma média de dois valores de f) $\times$ (o passo).

Ex 1: $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ (o de sempre, isto é, $f(t,y) = f(y) = y$)

Obs: Met. Euler Mod.

$$y_0 = \alpha$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(t_i,y_i) + f(t_{i+1}, y^e_{i+1})\right)$$

onde $y^e_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i)$

Tomando $h = 1/n$, $y_0 = 1$ e

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(y_i + y^e_{i+1}\right) = y_i + \frac{h}{2}\left(y_i + y_i + h y_i\right)$$

$$= y_i\left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right) = y_i\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right)$$

Portanto (verifique isso)

$$\boxed{y_n = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right)^n}$$

h	n	$y_n = \left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right)^n$	$\lvert\text{Erro}\rvert = \lvert y_n - e\rvert$
$1/10$	10	2.71408084661	0.0042
$1/100$	10^2	2.71823686256	0.45×10^{-4}
$1/10^3$	10^3	2.71828137575	0.45×10^{-6}
$1/10^4$	10^4	2.71828182393	0.45×10^{-8}

Euler modificado é um método de <u>ordem 2</u>

$$\lvert\text{Erro}\rvert \simeq \frac{1}{n^2} = h^2$$

Métodos de Runge-Kutta

- Euler modificado é um método de Runge-Kutta de ordem 2

$$\boxed{\begin{aligned} y_0 &= \alpha \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}\left(K_1 + K_2\right) \end{aligned}}$$

onde

$$\boxed{\begin{aligned} K_1 &= f(t_i, y_i) \\ K_2 &= f(t_{i+1}, y_i + h f(t_i, y_i)) \end{aligned}}$$

- Método de Runge-Kutta de ordem 4:(*)

$$\boxed{\begin{aligned} y_0 &= \alpha \\ y_{i+1} &= y_i + \underbrace{\frac{h}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right)}_{\text{Média ponderada de valores de } f.} \end{aligned}}$$

onde

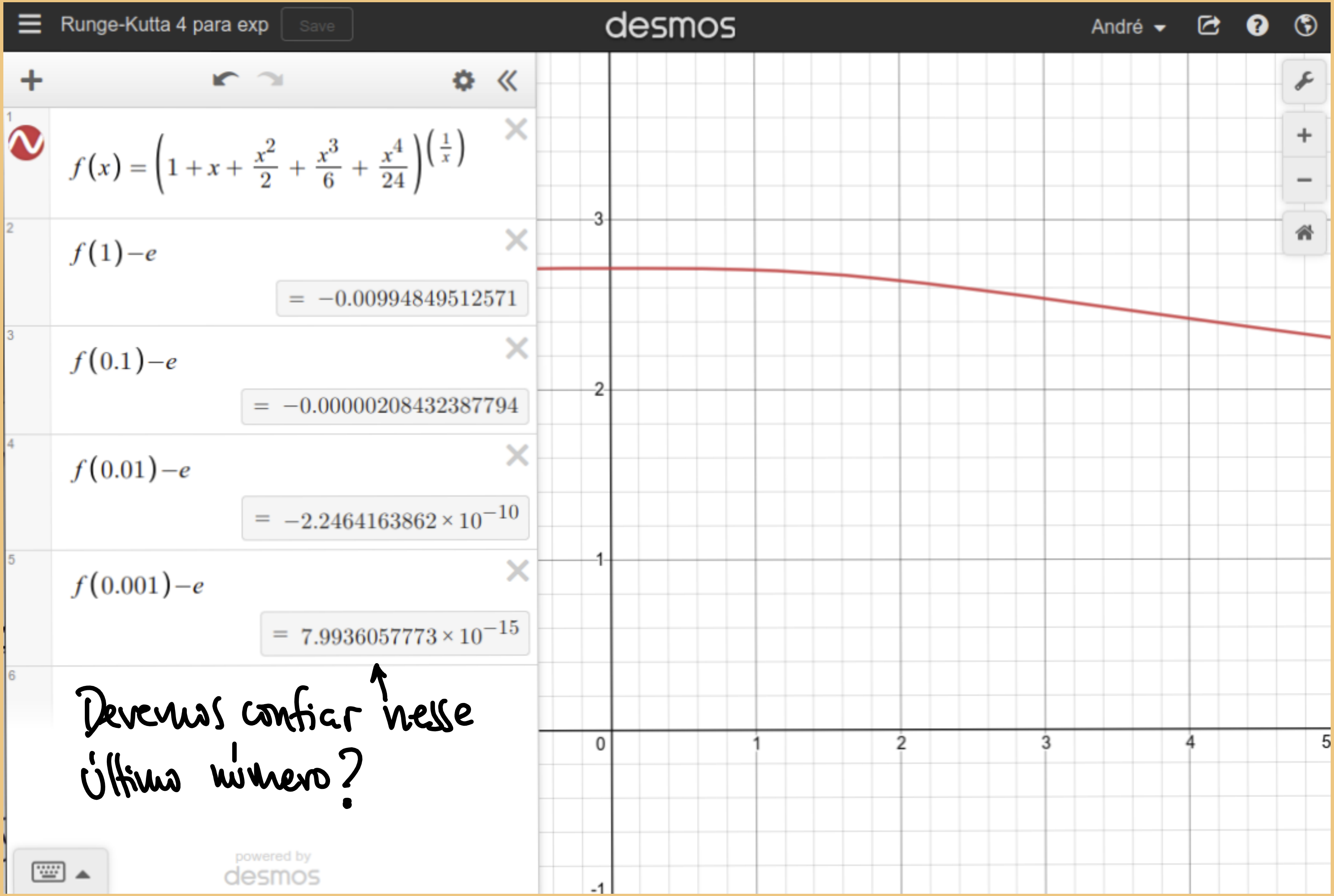
$$\boxed{\begin{aligned} K_1 &= f(t_i, y_i) \\ K_2 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1\right) \\ K_3 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_2\right) \\ K_4 &= f(t_{i+1}, y_i + hK_3) \end{aligned}}$$

(*) Compare com o método de Simpson para integração.

Ex 1: Verifique que para esse exemplo o Mét. de R-K de ordem 4 produz

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \Bigg\| \quad y_{i+1} = y_i\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24}\right) \quad e \quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{24n^4}\right)^n,$$

para $h = \frac{1}{n}$.



Devemos confiar nesse último número?

Os erros para $n = 1, 10, 10^2, 10^3$ estão ao lado.

Certifique-se de que $|\text{Erro}| \leq h^4$.