Integração Gaussiana

Teorema: Sejam $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$. A fórmula de integração para $\int_a^b f(x)\,dx \sim \int_a^b p_n(x)\,dx$ (com $p_n \in \mathcal{P}_n$ polinômio interpolador de f) é exata para toda $f(x) \in \mathcal{P}_{2n+1}$ se e somente se $x_0, x_1, \ldots, x_n$ forem as raízes do polinômio p_{n+1} da família de polinômios ortogonais em relação ao produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\,dx.$$

Dem: Seja $f \in \mathcal{P}_{2n+1}$. A fórmula de integração tem o seguinte formato $\int_a^b f(x)\,dx \sim \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$, onde $A_i = \int_a^b L_i(x)\,dx$ ($L_i(x)$ polinômios de Lagrange). Esta fórmula certamente é exata para $f \in \mathcal{P}_n$

$$f(x) = p_{n+1}(x)\, q(x) + r(x) \quad , \quad q(x), r(x) \in \mathcal{P}_n.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b p_{n+1}(x) q(x)\,dx + \int_a^b r(x)\,dx$$

estes dois termos são iguais pois $r(x) \in \mathcal{P}_n$!

$$\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} A_i\, p_{n+1}(x_i) q(x_i) + \sum_{i=0}^{n} A_i\, r(x_i)$$

$$\int_a^b p_{n+1}(x) q(x)\,dx = 0 \quad \left(\text{Pois } p_{n+1} \text{ é ortogonal a } \mathcal{P}_n\right)$$

Logo, se $p_{n+1}(x_i) = 0$, $\forall i$ então temos a exatidão da fórmula, pois os termos restantes são nulos.

Para que a fórmula seja exata p/ todo $p \in \mathcal{P}_{2n+1}(x)$, tem que ser exata p/ $q(x) = L_i(x) \Rightarrow p_{n+1}(x_i) = 0$.

Sobra uma pergunta? $p_{n+1}(x)$ tem todos zeros reais? São distintos? ficam em $[a,b]$? SIM!

Teor: p_{n+1} tem $n+1$ raizes reais, distintas, em $[a,b]$.

Dem: Sejam $p_0, p_1, \dots$, polinomios ortogonais em relação a $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

p_i se anula em pelo menos um ponto interior a $[a,b]$. $(i \geq 1)$.

$$\int_a^b p_i p_0\,dx = 0 = \int_a^b p_i(x)\,dx \longrightarrow p_i(x) \text{ tem raiz em } (a,b)$$

Queremos mostrar que p_k tem k raizes distintas em (a,b). $(k \geq 1)$.

Sejam $y_1 < y_2 < \dots < y_\ell$ as raízes de p_k onde p_k troca de sinal. Necessariamente $1 \leq \ell \leq k$

Queremos mostrar que $\ell = k$. Suponha que $\ell < k$.

Defina $q(x) = (x-y_1)\cdots(x-y_\ell)$.

Então, $q(x)$ e $p_k(x)$ trocam de sinal exatamente nos mesmos pontos. Logo $p_k(x)q(x) \geq 0$ em todo o intervalo $[a,b]$ (ou $-q(x)p_k(x) \geq 0$) e $= 0$ só nos pontos $y_1, \dots, y_\ell$.

$\longrightarrow \int_a^b p_k(x)q(x)\,dx \neq 0$ Por outro lado, $q(x) \in \mathcal{P}_\ell \subset \mathcal{P}_{k-1}$

p_k é ortogonal a $\mathcal{P}_{k-1}$. Se $\ell \leq k-1$

pto teríamos $\int_a^b p_k(x)q(x)\,dx = 0$ $\lightning$

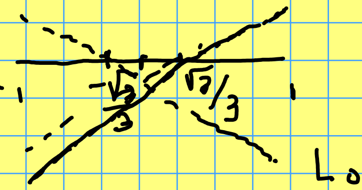
$\longrightarrow \ell = k$.

Exemplos: $n=1$ $\quad x_0$ e x_1 raizes de p_2

Vamos construir a fórmula para $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$

$p_0 = 1 \quad p_1 = x \quad p_2 = x^2 - 1/3 \qquad x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$A_0 = \int_{-1}^{1} L_0(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{x-\sqrt{3}/3}{-2\sqrt{3}/3}\,dx$$



$$A_1 = \int_{-1}^{1} L_1(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{x+\sqrt{3}/3}{2\sqrt{3}/3}\,dx$$

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx = A_0 + A_1 = 2 \longrightarrow A_0 = A_1 = 1$$

Fórmula: $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f\left(-\sqrt{3}/3\right) + f\left(\sqrt{3}/3\right)$

para $f=1$ $\quad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2 = 1 + 1$ –

$f=x$ $\quad \int_{-1}^{1} x\,dx = 0 \qquad -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$ –

$f=x^2$ $\quad \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3} \qquad \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ –

$f=x^3$ $\quad \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0 \qquad \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = 0$ –

$\underline{n=2}$ $\quad P_3(x) = x^3 - \frac{3x}{5} \longrightarrow$ raízes $\quad x_0 = -\sqrt{0.6} \quad x_1 = 0 \quad x_2 = \sqrt{0.6}$

$A_i = \int_{-1}^{1} L_i(x)\,dx \qquad A_0 + A_1 + A_2 = 2 \qquad A_0 = A_2$ por simetria

e $\quad A_1 = -\frac{5}{3}\int_{-1}^{1}\left(x^2 - \frac{3}{5}\right)dx = -\frac{5}{3}\left(\frac{2}{3} - \frac{6}{5}\right) = -\frac{5}{3}\left(\frac{-8}{15}\right) = \frac{8}{9}$

$\longrightarrow A_0 = A_2 = 5/9 \qquad$ Fórmula $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{9}\left(5f(-\sqrt{0.6}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{0.6})\right)$

exata em $\mathbb{P}_5$.

Exemplo:

Mudança de variáveis.

$\displaystyle\int_{1}^{2} 1/x\,dx \qquad x = a + bt \qquad dx = \frac{dt}{2} \qquad \begin{matrix} 1 = a - b \\ 2 = a + b \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a = 3/2 \\ b = 1/2 \end{matrix}$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\frac{3+t}{2}}\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{3+t}\,dt$$

fórmula $n=1$ $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{3+t}\,dt = \frac{1}{3+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} + \frac{1}{3+\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{6}{9-1/3}$

$$= \frac{6 \cdot 3}{26} = \frac{9}{13} = 0.692307.$$

$n=2$ $$\frac{1}{9}\left(5\left(\frac{1}{3-\sqrt{0.6}} + \frac{1}{3+\sqrt{0.6}}\right) + \frac{8}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\left(5\,\frac{6}{9-0.6} + \frac{8}{3}\right) = \frac{131}{189} = 0.69312169$$

exato $\ln 2$ erro $E_1 = 8.395 \times 10^{-4}$

$n=1$

$E_{n=2} = 2.55 \times 10^{-5}$

Fórmula Gaussiana com 3 pontos tem erro 50 vezes menor q. Simpson.

Uso normal das fórmulas Gaussianas $\longrightarrow$ n crescente.

Obs: Há fórmulas Gaussianas para $\displaystyle\int_a^b f(x)\underbrace{w(x)}\,dx$

onde $w(x)$ função peso.

Gauss - Chebyshev $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Gauss - Hermite $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-x^2}\,dx$

Gauss - Laguerre $\displaystyle\int_{0}^{\infty} f(x)\,e^{-x}\,dx$

Gauss - Lobato.