MAP3121 - Métodos Numéricos e Aplicações

Henrique von Dreifus

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

dreifus@ime.usp.br

30 de abril de 2021

Método de Simpson II

Método de Simpson com repetição

Dado $f : C^4[a,b] \to \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos $h_n = \frac{b-a}{2n}$. Uma aproximação para $\int_a^b f(x)dx$ pode ser obtida pelo seguinte procedimento:

- $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a+2h_n} f(x)dx + \int_{a+2h_n}^{a+4h_n} f(x)dx + ...$$
  $$\int_{a+2(n-2)h_n}^{a+2(n-1)h_n} f(x)dx + \int_{a+2(n-1)h_n}^{b} f(x)dx$$
- Para cada uma das integrais acima considere a aproximação:

$$\int_{a+2kh_n}^{a+2(k+1)h_n} f(x)dx \approx \int_{a+2kh_n}^{a+2(k+1)h_n} p_2^{(k)}(x)dx$$

com $p_2^{(k)}(x)$ o polinômio que interpola $\Big(a + 2kh_n, f(a + 2kh_n)\Big)$, $\Big(a + (2k+1)h_n, f(a + (2k+1)h_n)\Big)$ e $\Big(a + (2k+2)h_n, f(a + (2k+2)h_n)\Big)$

- Temos então que

$$\int_{a+2kh_n}^{a+2(k+1)h_n} f(x)dx \approx \int_{a+2kh_n}^{a+2(k+1)h_n} p_2^{(k)}(x)dx =$$

$$\frac{h_n}{3}\left\{f(a + 2kh_n) + 4f(a + (2k+1)h_n) + f(a + 2(k+1)h_n)\right\}$$

e cada uma dessas aproximações satisfaz a estimativa:

$$\left| \int_{a+2kh_n}^{a+2(k+1)h_n} f(x)dx - \int_{a+2kh_n}^{a+2(k+1)h_n} p_2^{(k)}(x)dx \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{90} \max_{\xi \in [a,b]} \mid f^{(4)}(\xi) \mid h_n^5$$

- Resultando na aproximação:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n$$

com

$$\boxed{\begin{array}{c} S_n = \frac{h_n}{3}\{1f(a) + 4f(a+h_n) + 2f(a+2h_n) + \ldots \\ +2f(a+(2n-2)h_n) + 4f(a+(2n-1)h_n) + 1f(b)\} \end{array}}$$

- A precisão da aproximação $\int_a^b f(x)dx \approx S_n$ é estimada por:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S_n \right| \leq$$

$$\left| \sum_{k=0}^{k=n-1} \left\{ \int_{a+2kh_n}^{a+2(k+1)h_n} f(x)dx - \int_{a+2kh_n}^{a+2(k+1)h_n} p_2^{(k)}(x)dx \right\} \right| \leq$$

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} \left| \int_{a+2kh_n}^{a+2(k+1)h_n} f(x)dx - \int_{a+2kh_n}^{a+2(k+1)h_n} p_2^{(k)}(x)dx \right|$$

$$n\frac{1}{90} \max_{\xi\in[a,b]} \mid f^{(4)}(\xi) \mid h_n^5 \implies$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S_n \right| \leq \frac{1}{2880} \max_{\xi\in[a,b]} \mid f^{(4)}(\xi) \mid \frac{(b-a)^5}{n^4}$$

Método de Simpson com Repetições

Dado $f : C^4[a,b] \to \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$, uma aproximação para:

$$\int_a^b f(x)dx$$

com precisão ϵ é obtida pelo seguinte procedimento:

- Escolha n_ϵ como o menor inteiro tal que:

$$\frac{1}{2880} \max_{\xi \in [a,b]} \mid f^{(4)}(\xi) \mid \frac{(b-a)^5}{n_\epsilon^4} \leq \epsilon$$

- Defina $h_\epsilon = \frac{b-a}{2n_\epsilon}$.

- Considere a aproximação:

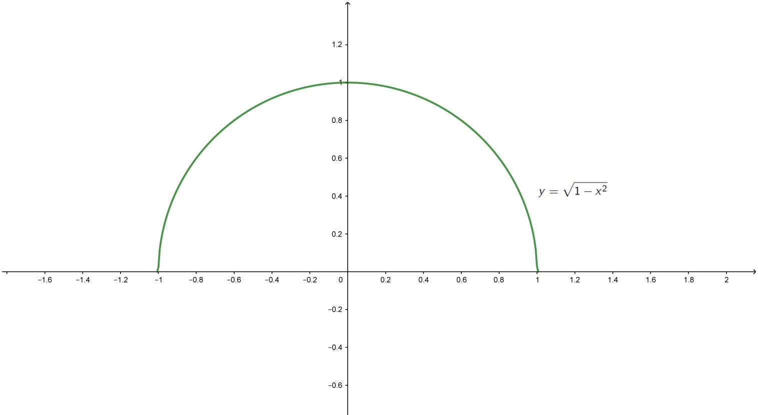
$$\int_a^b f(x)dx \approx S_{n_\epsilon} = \frac{h_\epsilon}{3}\{1f(a) + 4f(a+h_\epsilon) + 2f(a+2h_\epsilon) + \ldots$$

$$+2f(a+(2n_\epsilon-2)h_\epsilon) + 4f(a+(2n_\epsilon-1)h_\epsilon) + 1f(b)\}$$

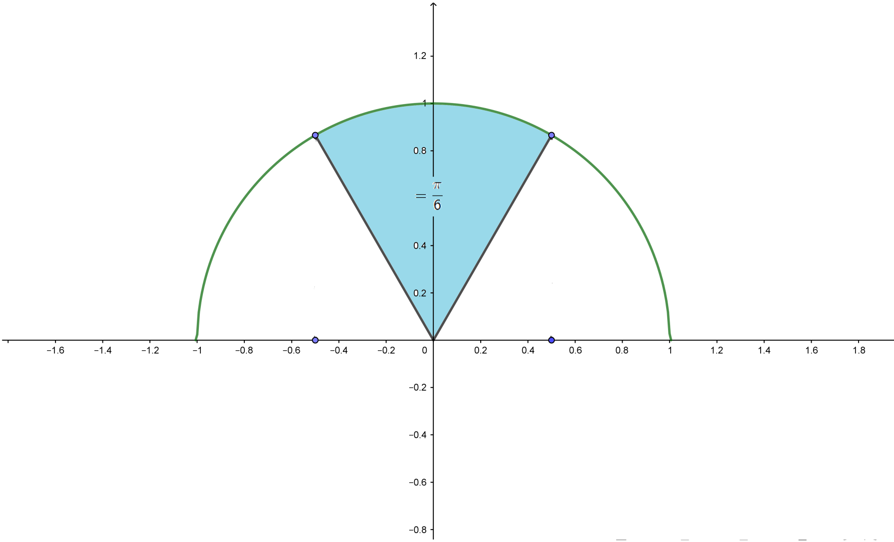
Exemplo

Obter uma aproximação do valor de π com precisão $\epsilon = 10^{-6}$.

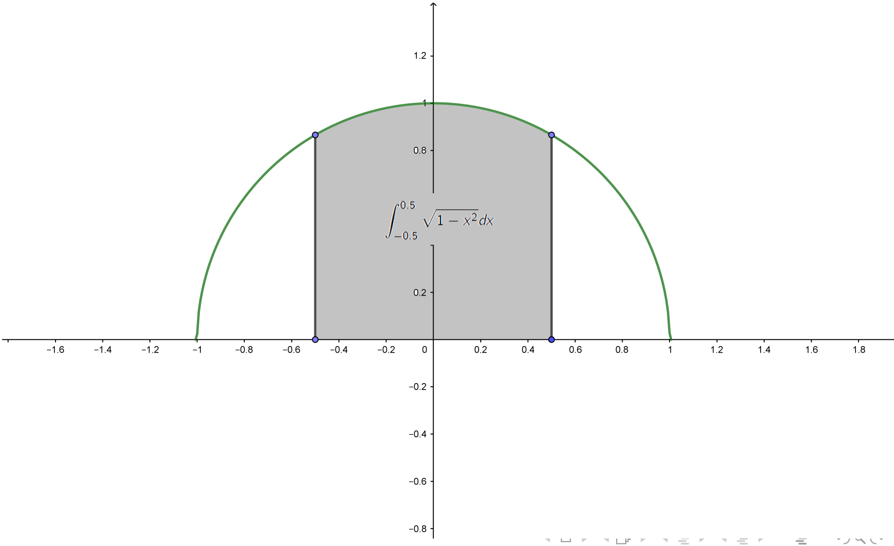
Considere a função $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$



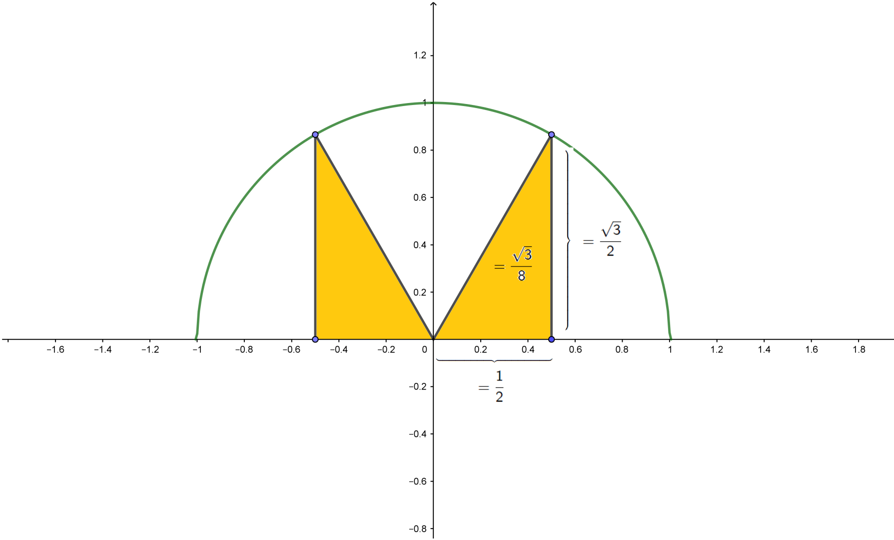
Como a área A do círculo unitário é π, a área indicada abaixo é $\frac{\pi}{6}$.



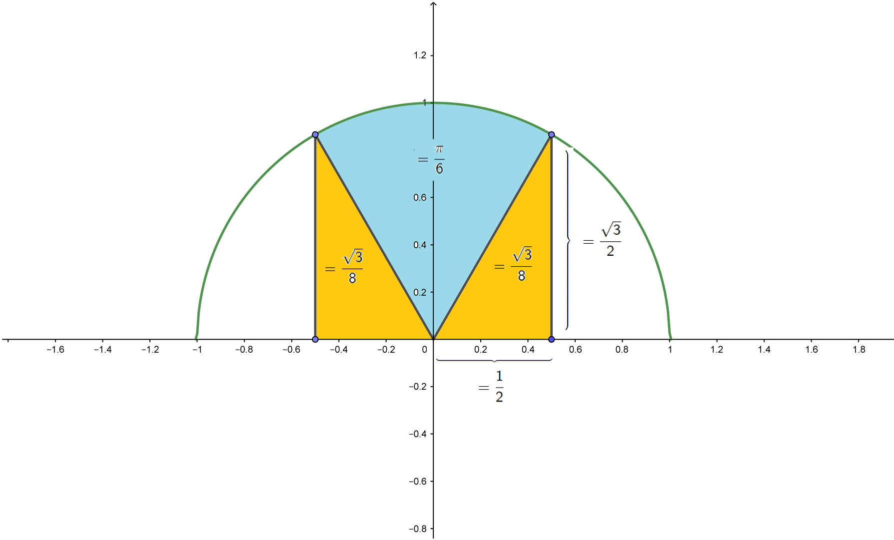
o valor da integral $\int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1-x^2}dx$ é a área da região indicada abaixo.

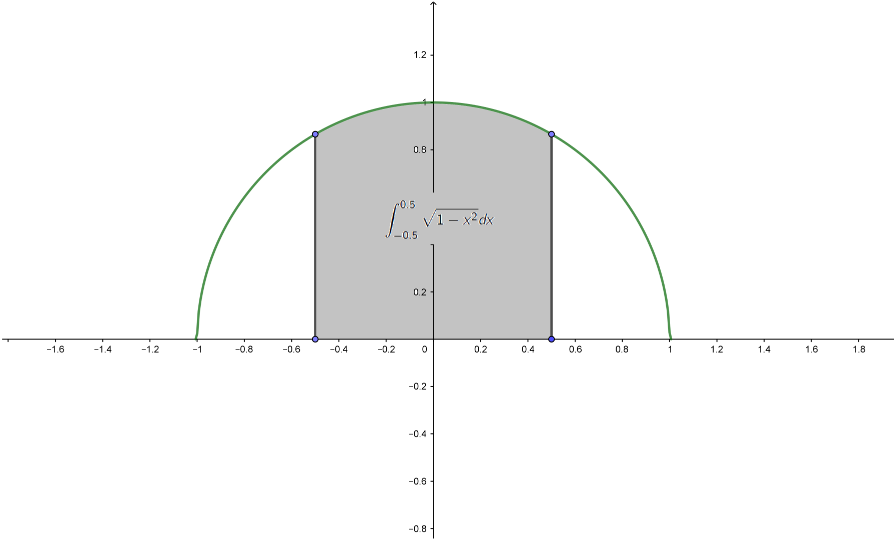


Considerando os triangulos indicados na figura abaixo,



Temos a seguinte decomposição para a área definida por
$$\int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1-x^2}dx$$




$\int_{-0.5}^{0.5} \sqrt{1-x^2}dx$
1.2
1
0.8
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.6
-1.4
-1.2
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8

Temos então que:

$$\pi = 6 \times \left\{ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}dx - \frac{\sqrt{3}}{4} \right\}$$

Assumindo que o computador a ser utilizado calcula o valor de $\frac{\sqrt{3}}{4}$ e valores de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ com precisão de pelo menos 10^{-10}, se calcularmos

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}dx$$

com precisão $\epsilon = 10^{-7}$, podemos substituir o valor obtido na expressão acima e o resultado é uma aproximação de π com precisão de pelo menos 10^{-6}.

Cálculo de $\int_{-0.5}^{0.5} \sqrt{1-x^2}dx$ com precisão $\epsilon = 10^{-7}$

- Escolha de n_ϵ.

$$\frac{1}{2880} \max_{\xi \in [a,b]} \mid f^{(4)}(\xi) \mid \frac{(b-a)^5}{n_\epsilon^4} \leq \epsilon$$

para $f(x) = \sqrt{1-x^2}$,

$$f^{(4)}(x) = \frac{3-12x^2}{(1-x^2)^{7/2}}$$

e

$$\max_{\xi \in [-0.5,0.5]} \mid f^{(4)}(\xi) \mid = 3$$

Assim, n_ϵ deve ser escolhido de forma que:

$$\frac{3}{2880}\frac{1}{n_\epsilon^4} \leq 10^{-7}$$

De onde concluimos que $n_\epsilon = 11$ é suficiente para assegurar a precisão 10^{-7}

- $$h_\epsilon = \frac{b-a}{2n_\epsilon} = \frac{0.5-(-0.5)}{2\cdot 11} = 0.045454545$$

- Cálculo de S_{n_ϵ}

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_{n_\epsilon} = \frac{h_\epsilon}{3}\{1f(a) + 4f(a+h_\epsilon) + 2f(a+2h_\epsilon) + \ldots$$

$$+2f(a+(2n_\epsilon - 2)h_\epsilon) + 4f(a+(2n_\epsilon - 1)h_\epsilon) + 1f(b)\}$$

$$S_{n_\epsilon} = 0.956611333$$

De onde obtemos:

$$6\left\{\int_{-0.5}^{0.5}\sqrt{1-x^2}dx - \frac{\sqrt{3}}{4}\right\} \approx 6\{0.956611333 - 0.433012702\}$$

$$\pi \approx 3.1415917 \pm 0.000001$$

-0.500000000	0.866025404	$= f(-0.500000000)$
-0.454545455	3.562894171	$= 4f(-0.454545455)$
-0.409090909	1.824987264	$= 2f(-0.409090909)$
-0.363636364	3.726163915	$= 4f(-0.363636364)$
-0.318181818	1.896059420	$= 2f(-0.318181818)$
-0.272727273	3.848365543	$= 4f(-0.272727273)$
-0.227272727	1.947662299	$= 2f(-0.227272727)$
-0.181818182	3.933328664	$= 4f(-0.181818182)$
-0.136363636	1.981317702	$= 2f(-0.136363636)$
-0.090909091	3.983436782	$= 4f(-0.090909091)$
-0.045454545	1.997932816	$= 2f(-0.045454545)$

0.000000000	4.000000000	$= 4f(0.000000000)$
0.045454545	1.997932816	$= 2f(0.045454545)$
0.090909091	3.983436782	$= 4f(0.090909091)$
0.136363636	1.981317702	$= 2f(0.136363636)$
0.181818182	3.933328664	$= 4f(0.181818182)$
0.227272727	1.947662299	$= 2f(0.227272727)$
0.272727273	3.848365543	$= 4f(0.272727273)$
0.318181818	1.896059420	$= 2f(0.318181818)$
0.363636364	3.726163915	$= 4f(0.363636364)$
0.409090909	1.824987264	$= 2f(0.409090909)$
0.454545455	3.562894171	$= 4f(0.454545455)$
0.500000000	0.866025404	$= f(0.500000000)$