MAP3121 - Métodos Numéricos e Aplicações

Henrique von Dreifus

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

dreifus@ime.usp.br

16 de abril de 2021

Integração Numérica

Integração Numérica

Dado $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$,

obter uma aproximação de:

$$\int_a^b f(x)dx$$

com precisão ϵ.

Nas situações em que conhecemos uma função $F(x)$ tal que

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$$

a solução é obtida analíticamente por:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

sendo suficiente nestes casos o cálculo de $F(b) - F(a)$ com a precisão indicada.

Em casos em que não temos conhecimento de $F(x)$, como por exemplo:

$$\int_0^{0.5} \sqrt{1-x^2}dx \quad \text{ou} \quad \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

uma possível estratégia é aproximar $f(x)$ no intervalo $[a,b]$ por uma outra função $g(x)$ para a qual conhecemos $G(x)$ tal que $\frac{dG}{dx}(x) = g(x)$

$$f(x) \approx g(x)$$

e considerarmos:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b g(x)dx = G(b) - G(a)$$

Para tanto vamos desenvolver algoritmos baseados na aproximação do integrando $f(x)$ por polinômios interpoladores.

Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^2[a, b]$, o polinômio

$$p_1(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}$$

interpola os pontos $\{(a, f(a)); (b, f(b))\}$ e,

$$\mid E(x) \mid = \mid f(x) - p_1(x) \mid \leq$$

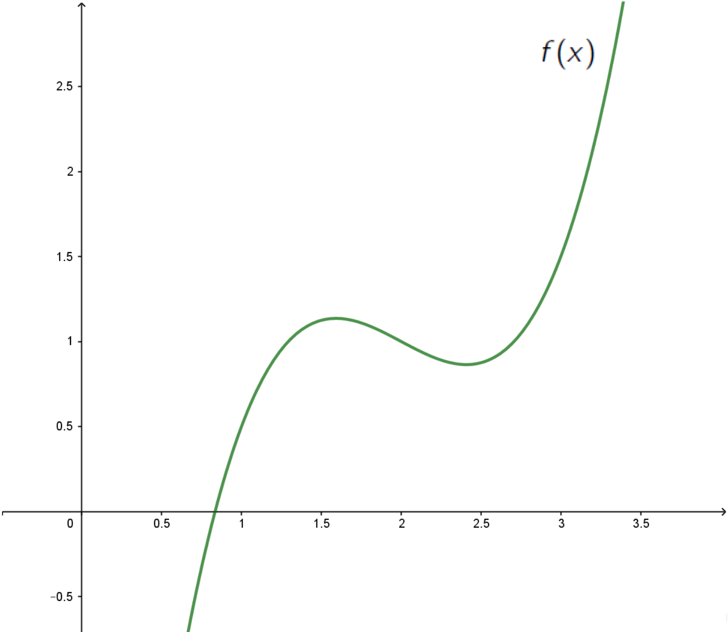
$$\frac{1}{2!} \max_{\xi \in [a,b]} \mid f^{(2)}(\xi) \mid\mid (x-a)(x-b) \mid$$

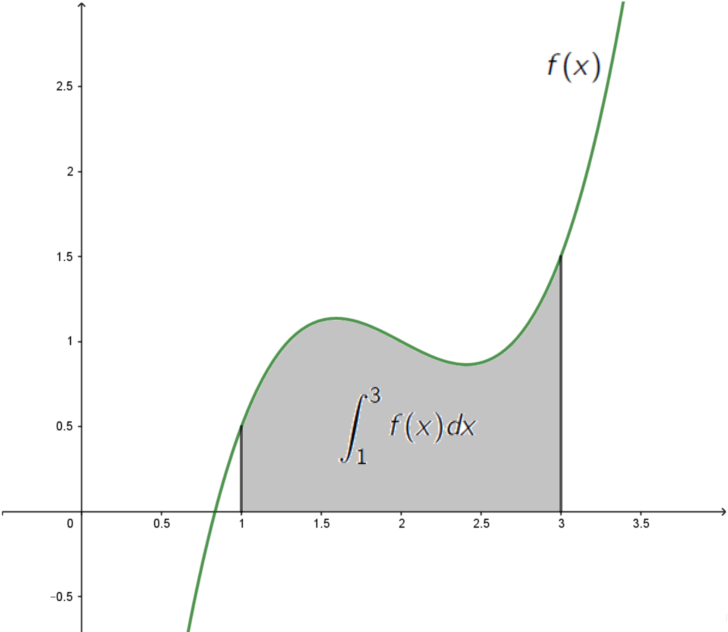
A partir da aproximação:

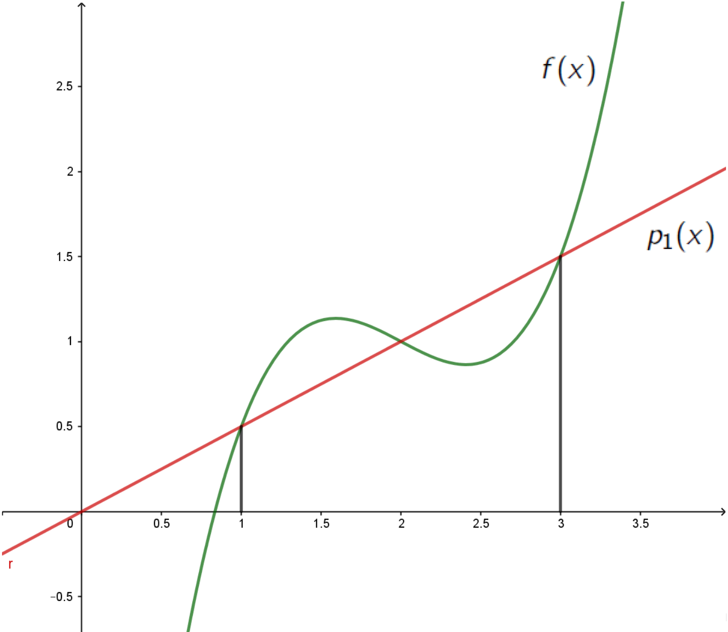
$$f(x) \approx p_1(x)$$

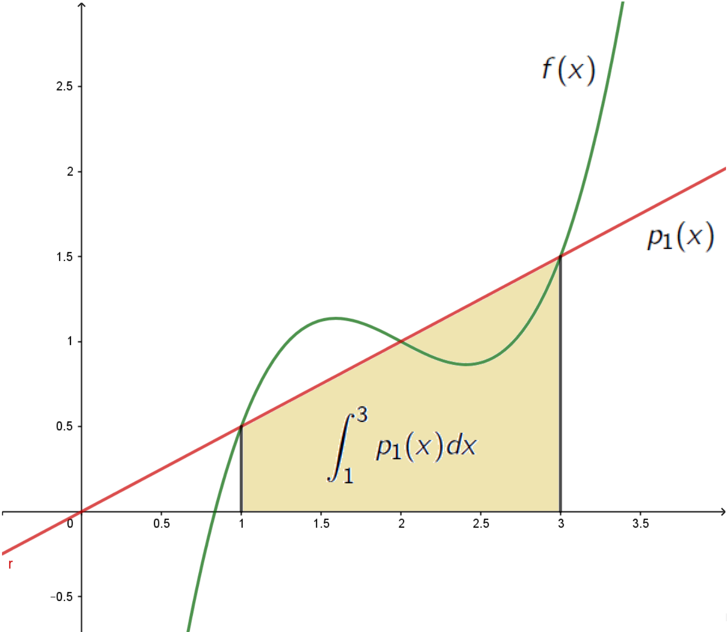
Podemos considerar a seguinte aproximação para $\int_a^b f(x)dx$,

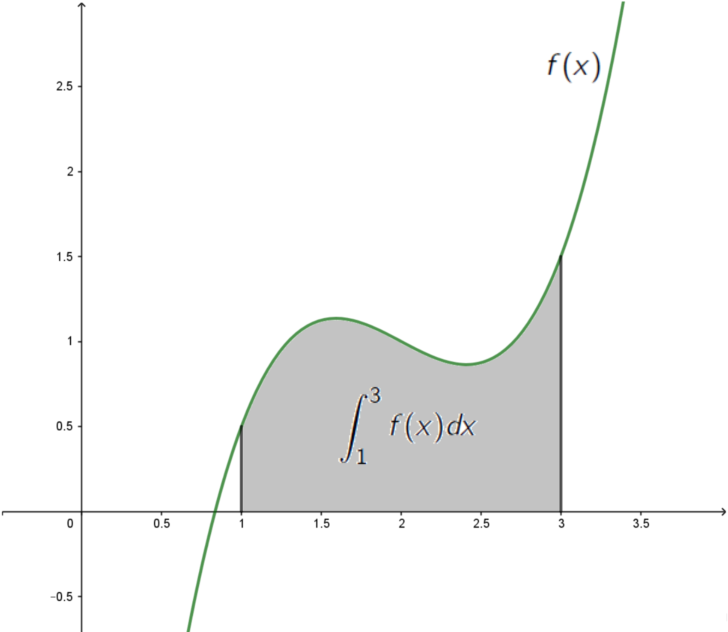
$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_1(x)dx = \frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a) = T_1$$

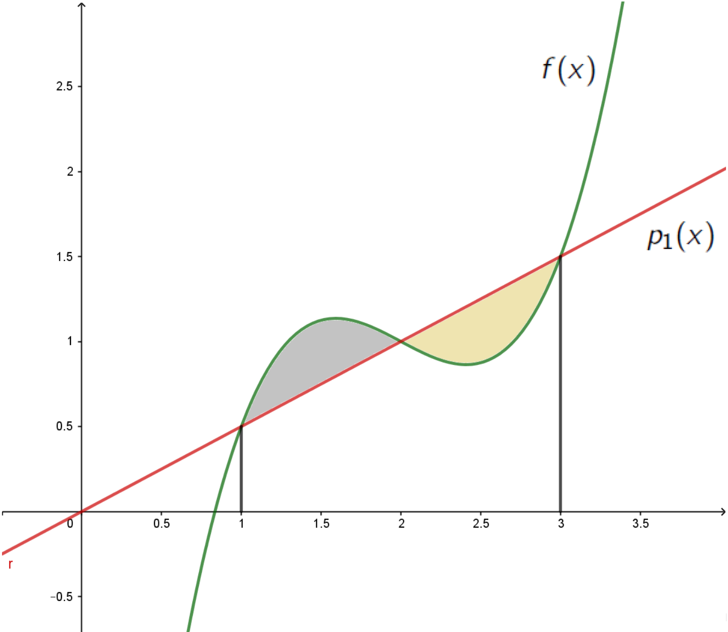

f(x)
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5


$f(x)$
$\int_1^3 f(x)dx$
2.5
2
1.5
1
0.5
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5


$f(x)$
$p_1(x)$
r
2.5
2
1.5
1
0.5
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5


f(x)
p1(x)
∫ 1 3 p1(x)dx
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
r


f(x)
2.5
2
1.5
1
0.5
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
$\int_1^3 f(x)dx$


$f(x)$
$p_1(x)$
r
2.5
2
1.5
1
0.5
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5

e a precisão desta aproximação pode ser estimada por:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - T_1\right| = \left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b p_1(x)dx\right| =$$

$$\left|\int_a^b [f(x) - p_1(x)]dx\right| \leq \int_a^b \left|f(x) - p_1(x)\right| dx =$$

$$\int_a^b \left|E(x)\right| dx \leq \int_a^b \frac{1}{2!} \max_{\xi \in [a,b]} \left|f^{(2)}(\xi)\right| \left|(x-a)(x-b)\right| dx =$$

$$\frac{1}{2!} \max_{\xi \in [a,b]} \left|f^{(2)}(\xi)\right| \int_a^b \left|(x-a)(x-b)\right| dx =$$

Para calcular $\int_a^b \left|(x-a)(x-b)\right| dx$ efetuamos a mudança de variável

$$y = x - a; \implies (x-a)(x-b) = y(y - \overbrace{(b-a)}^{=h}); \quad dy = dx$$

$$\begin{cases} a & \rightarrow & 0 \\ b & \rightarrow & b-a & = & h \end{cases}$$

$$\frac{1}{2!} \max_{\xi \in [a,b]} \left|f^{(2)}(\xi)\right| \int_0^h -y(y-h)dy = \frac{1}{2!} \max_{\xi \in [a,b]} \left|f^{(2)}(\xi)\right| [-\frac{h^3}{3} + \frac{h^2}{2} h]$$

Concluimos então que:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - T_1\right| \leq \frac{1}{12} \max_{\xi\in[a,b]} \left|f^{(2)}(\xi)\right| h^3$$

$$h = b - a$$