Algebra 1, 2023 Lista de Exercícios

(Não precisa entregar)

1) Quantos inteiros, x, dividem $x+20230$

e são divisíveis por $x+10230$. (Não esqueça de contar os negativos)

2). Mostre usando os axiomas dos inteiros que $0.x = 0$ para todo x.

.. mostre que só existe um elemento que satisfaz isso.

3) Seja x inteiro define

$x^0 = 1$ e $x^{n+1} = x^n . x$ para $n \geq 0$

Mostre que $x^{n+m} = x^n . x^m$.

4) Seja $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que

$f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo x, y em $\mathbb{Z}$

Mostre que $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$.

5) Considere o nº de Fermat $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ onde n é um nº natural

a) Prove que se $m < n$ então $F_m \mid F_n - 2$

b) Prove que se $n \neq m$ então $mdc(F_n, F_m) = 1$

c) Use os fatos anteriores a) e b) para dar uma outra demonstração da existência de infinitos números primos

6) Sejam b e c primos entre si mostre que

$$\text{mdc}(a, bc) = \text{mdc}(a, b) \cdot \text{mdc}(a, c).$$

7) mostre que se $M_n = 2^n - 1$ $(n > 1)$ é primo então n é primo (Cataldi-Fermat).

8) Se $2^a + 1$ é primo então a é uma potencia de 2.

9) Determinar as soluções das seguintes equações diofantinas

a) $31x + 9y = 2$

b) $14x + 38y = 2023$

c) $91x + 221y = 1053$

d) $7469x + 2387y = 308$

e) $7293x - 364y = 3732$

f) $32x + 64y = 37251$

10) Determinar, se existirem as soluções positivas dos escemplos no ítem 9.

11) Exprimir o nº 100 como soma de dois inteiros positivos de modo que o primeiro seja divisivel por 7 e o segundo seja divisivel por 11.

12) Determinar o menor inteiro positivo que tem restos 16 e 27 quando dividido, respectivamente por 39 e 56

13) Resolver as seguintes congruências lineares

a) $7x \equiv 5 \ (12)$

b) $252x \equiv 312 \ (1325)$

c) $63020x \equiv 276 \ (76084)$

d) $3640x \equiv 91 \ (7293)$

14) Determinar o menor inteiro positivo x tal que $1296x \equiv 1105 \pmod{2413}$.

15) Seja p um n.º primo e a um inteiro tal que $p \nmid a$.

- Mostre que $ax \equiv ay \ (p) \Rightarrow x \equiv y \ (p)$
- Mostre que $p \nmid a$ (p primo)

então $a, 2a, 3a, 4a, 5a, \ldots, (p-1)a$

são todos distintos.

Conclua que $a \times 2a \times 3a \times \ldots \times (p-1)a \equiv 1.2.3 \ldots p-1 \ (p)$

Conclua que $a^{p-1}(p-1)! \equiv (p-1)! \ (p)$

Conclua que $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

(16) a) Mostre a soma de dois quadrados de inteiros ímpares não é um quadrado.

b) mostre que não existem quadrados inteiros cujo resto da divisão por 4 é 3.

(17) Seja $\cong$ uma relação de equivalência num conjunto S não vazio.

Isto é: 1) $a \cong a$ para todo $a \in S$

2) $a \cong b \implies b \cong a$ para todo $a, b \in S$.

3) $a \cong b$ e $b \cong c \implies a \cong c$.

Dado $s \in S$ defina $[s] = \{ x \in S : x \cong s \}$

. Mostre que $[s] \cap [t] \neq \phi \implies [s] = [t]$.

.. Conclua que $S = \dot{\bigcup} [s]$ ~~onde~~ os $[s]$ são todos distintos, se $[s] = [t]$ escrevemos só uma vez na união.

Agora façamos o reverso

Seja S não vazio

Assuma $S = \dot{\bigcup}_{j \in I} S_j$ → união disjunta

(Isso significa que a união é disjunta ou seja $S_j \cap S_k = \phi$ se $j \neq k$.)

Defina em S a seguinte relação:

$s_1 \cong s_2$ se Existe algum j tal que $s_1 \in S_j$ e $s_2 \in S_j$.

mostre que essa é uma relação de equivalência

18) Defina número inteiro primo.
Defina o que é mdc(a, b)
Enuncie e demonstre o teorema de Bezout.

19) Prove ~~e~~ enuncie a relação de stiefel.

20) Mostre que se a e b são inteiros e n é inteiro $n \geq 1$ então

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

21) Mostre que $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$ sempre que $0 \leq i \leq n$

22) Mostre que se um conjunto tem 45 elementos então ele tem 2^{45} subconjuntos (Porque isso vale?)

23) a) Se um número n não é primo sempre existem a e b tais que $a \not\equiv 0 \ (n)$, $b \not\equiv 0 \ (n)$ mas $ab \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ n)$.

b) Se n é primo e $a \not\equiv 0 \ (n)$ e $b \not\equiv 0 \ (n)$ então $ab \not\equiv 0 \ (n)$