Capítulo 1

Modelos Hierárquicos e a solução de Parisi

1.1 Modelo de Ising hierárquico

O objetivo desta seção é descrever técnicas que permitem analisar o problema de múltiplas escalas através de equações diferenciais parciais parabólicas. Isto será útil ao descrever o esquema de Parisi para quebra de simetria de réplicas em modelos de vidros de spin, que será retomado nas últimas páginas desta seção.

O modelo hierárquico de Ising foi primeiramente introduzido por F. Dyson. O hamiltoniano é escrito como uma soma sobre escalas de interações. Isso permite uma análise rigorosa do Grupo de Renormalização, que foi realizada por Eckmann e Collet. Esta seção está em parte inspirada em material do Domingos Marchetti. O leitor mais atento verá que nosso tratamento é diferente do dele, pois enquanto nós olharemos para a evolução da energia livre ele olha para a medida a priori em cada escala [1].

Primeiro definimos uma rede hierárquica . O inteiro L descreve o grau de ramificação de um estrutura composta de N gerações (ou escalas). Cada spin de Ising na posição X_N assume valores $\sigma_{X_N} = 1$ ou -1. A posição X_N representa o endereço do spin e pode ser escrito por uma sequência de inteiros $X_N = (x_0, x_1, x_2, ...x_N)$ que descrevem o endereço em cada escala, onde $0 \leq x_i \leq L-1$ Por exemplo se $L = 2$,, os $\{x_i\}$ representam os bits do endereço X. Na figura 1.1 cada tamanho de caixa está associada a uma escala. Nessa escala interagem somente os spins dentro da mesma caixa. Por exemplo, os sítios cinza ($X_3 = (0,0,0,0)$ e $X_3 = (0,1,0,0)$ interagem só nas escalas ≥ 3

O hamiltoniano é uma soma sobre as diferentes escalas

$$H^{(N)} = \sum_{n=0}^{N} H_n \tag{1.1}$$

[1] Esta é a diferença ente olhar redes de Cailey e de Bethe

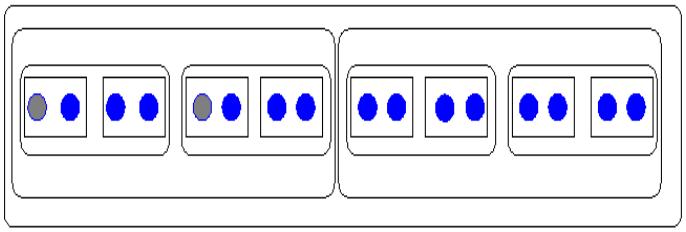

Figura 1.1: Uma rede hierárquica com $L = 2$ e $N = 3$

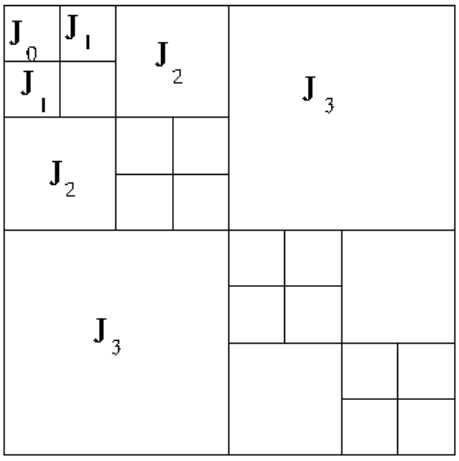

Figura 1.2: Matriz das interações $J_{XX'} = J_n$

onde os hamiltonianos na escala n, H_n contém interações entre spins que estão a no máximo uma distância L^n e estas interações decaem exponencialmente com n

$$H_n = -A\frac{1}{2L^{\gamma n}} \sum_{x_{n+1},x_{n+2},\ldots,x_N} \left(\sum_{x_0,x_1,\ldots,x_n} \sigma_X \right)^2 \tag{1.2}$$

onde introduzimos uma constante de acoplamento

$$A := \frac{L^\gamma - 1}{2\gamma}. \tag{1.3}$$

O hamiltoniano pode ser escrito de uma forma mais convencional

$$H^{(N)} = -\frac{1}{2} \sum_{X,X`} J_{XX'} \sigma_X \sigma'_X, \tag{1.4}$$

a menos de uma constante. A interação $J_{XX'}$ depende da distância hierárquica entre os spins nas posições X e X', $D_{XX'} = L^n$, onde n é a escala da menor caixa que contém os dois spins.

$$J_{XX'} = \sum_{k=n}^{N} \frac{A}{L^{\gamma n}} \tag{1.5}$$

decai com a distância, ver fig. **??**. A variação da interação entre spins numa caixa de escala n e spins separados até a escala $n+1$ é

$$\Delta J_n = J_n - J_{n+1} = \frac{A}{L^{\gamma n}} \tag{1.6}$$

Uma propriedade interessante do Hamiltoniano que descreve o sistema na escala N é que pode ser escrito como as L contribuições na escala menor anterior mais um termo quadrático nos spins:

$$H^{(N)} = \sum_{l=0}^{L} H^{(N-1),l} - \frac{A}{2L^{\gamma N}} \left(\sum_{x_0,x_1,\ldots,x_n} \sigma_X \right)^2 \tag{1.7}$$

onde colocamos um índice l a mais no hamiltoniano na escala $N-1$, para indicar a qual das caixas se refere.

Estamos interessados na função de partição

$$Z^{(N)}(h) = \sum_{\{\sigma_X\}} e^{-\beta H^{(N)} + h\sum_X \sigma_X} \tag{1.8}$$

onde acoplamos o sistema a um campo magnético h (adimensional). Usando a equação 1.7 para escrever

$$Z^{(N)}(h) = \sum_{\{\sigma_X\}} \exp - \left(\beta \sum_{l=0}^{L} H^{(N-1),l} - \frac{A}{2L^{\gamma N}} \beta \left(\sum_{x_0,x_1,\ldots,x_n} \sigma_X \right)^2 + h \sum_X \sigma_X \right) \tag{1.9}$$

O termo quadrático representa o acoplamento na escala N das caixas na escala $N-1$. Podemos linearizá-lo usando novamente o fato que a transformada de Laplace da gaussiana é: $\exp(A^2/2) = \int \exp(-z^2/2 - Az)dz/\sqrt{2\pi} = \int Dz \exp(-Az)$

$$Z^{(N)}(h) = \int Dz \sum_{\{\sigma_X\}} \exp - \left(\beta \sum_{l=0}^{L} H^{(N-1),l} + (\sqrt{\frac{A\beta}{L^{\gamma N}}} z + h) \sum_X \sigma_X \right) \quad (1.10)$$

$$Z^{(N)}(h) = \int Dz \prod_{l=1}^{L} Z^{(N-1,l)}(\sqrt{\frac{A\beta}{L^{\gamma N}}} z + h) \quad (1.11)$$

$$Z^{(N)}(h) = \int Dz \left(Z^{(N-1,l)}(\sqrt{\beta \Delta J_N} z + h) \right)^L \quad (1.12)$$

$$Z^{(N)}(h) = e^{\beta \Delta J_N \frac{\partial^2}{\partial h^2}} \left(Z^{(N-1,l)}(h) \right)^L, \quad (1.13)$$

onde usamos :

exercício

Mostre que

$$\int Dz f(az + h) = e^{a^2 \frac{\partial^2}{\partial h^2}} f(h), \quad (1.14)$$

expandindo em série a gaussiana e usando a representação de Fourier de f.

Até aqui tudo é exato. Estamos interessados em obter um limite onde a energia livre pode ser obtida através de uma equação diferencial parcial parabólica, que descreve uma difusão pela árvore hierárquica. Consideremos o limite termodinâmico $N \to \infty$ juntamente com $L \to 1$ de tal forma que

$$N \log L = t \quad (1.15)$$

é mantida fixa. Note, pela eq. 1.3, e definindo ϵ por

$$(N-1) \log L = t - \epsilon \quad (1.16)$$

teremos

$$\begin{aligned} A &= \epsilon/2 \\ \Delta J_N &= \epsilon \exp(-\gamma t) \\ L &= \exp \epsilon = 1 + \epsilon \end{aligned} \quad (1.17)$$

e para uso posterior defina a derivada

$$\frac{dJ(t)}{dt} = \exp(-\gamma t) \quad (1.18)$$

Defina

$$u(h,t) = -\log Z^{(N)}(h), \quad (1.19)$$

e a derivada

$$u_t := \frac{\partial u}{\partial t} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{u(h,t) - u(h,t-\epsilon)}{\epsilon}. \tag{1.20}$$

Queremos o limite de

$$u(h,t) = -\log \int Dz e^{-(1+\epsilon)u(h+\sqrt{\beta\epsilon}e^{-\frac{\gamma t}{2}}z, t-\epsilon)} \tag{1.21}$$

expandindo u em série até ordem ϵ

$$u(h,t) = -\log \int Dz \exp(-u(h,t)(1+\epsilon) + \epsilon u_t - \sqrt{\beta\epsilon}e^{-\frac{\gamma t}{2}} z u_h - \frac{\beta\epsilon}{2} e^{-\gamma t} z^2 u_{hh}) \tag{1.22}$$

Como $u(h,t)$ não depende de z

$$u(h,t) = u(h,t) - \log \int Dz \left(1 - \epsilon u + \epsilon u_t - \sqrt{\beta\epsilon}e^{-\frac{\gamma t}{2}} z u_h - \frac{\beta\epsilon}{2} e^{-\gamma t} z^2 (u_{hh} - (u_h)^2)\right) \tag{1.23}$$

Usamos $\int z Dz = 0$ e $\int z^2 Dz = 1$

$$u_t = u + \frac{\beta}{2} e^{-\gamma t}(u_{hh} - (u_h)^2). \tag{1.24}$$

Podemos introduzir a variação da interação J com a escala, para referência futura

$$u_t = u + \frac{\beta}{2} \frac{dJ(t)}{dt}(u_{hh} - (u_h)^2). \tag{1.25}$$

esta equação deve ser completada por uma condição inicial

$$u(h,0) = -\log(2\cosh(\beta h)) \tag{1.26}$$

que a energia livre de um spin num campo magnético h. (verificar). O problema 'e determinar o $\lim_{h\to 0}\lim_{t\to\infty} u_h$, para altas e para baixas temperaturas. Voces podem brincar com isso.

Para nossos objetivos atuais, que são olhar para a solução de Parisi, a obtenção desta equação é suficiente. A solução desta é interessante *per se*, mas passaremos ao próximo tópico de interesse, o limite de $n \to 0$.

1.2 O limite de $n \to 0$

A equação 1.12 pode ser usada para descrever o problema de spinglass antes de tomar o limite de $n \to 0$. A diferença é que agora L não é uma constante, mas depende da escala de uma forma que deverá ser determinada posteriormente de forma variacional.

As caixas no problema de VS começam a ser numeradas de fora para dentro, assim a figura 1.2 começa com q_0 no lugar de J_N (na figura $N = 3$), e o índice de escala, que agora chamaremos k cresce para dentro e portanto pode ser interpretado como a resolução com que se olham as réplicas. O tamanho

das caixas passa a ser chamado m_k. A ramificação L em cada escala $k+1$ é o número de caixas de tamanho m_{k+1} dentro de uma caixa de tamanho m_k, portanto $L(k) = \frac{m_k}{m_{k+1}}$ e começamos com $m_0 \equiv n$. Assim se escrevemos a função de partição usando a eq. 1.12 teremos:

$$Z^{(m_k)}(h) = \int Dz \left(Z^{(m_{k+1})}(\sqrt{\beta(q_{k+1} - q_k)}z + h) \right)^{\frac{m_k}{m_{k+1}}} \tag{1.27}$$

Isto pode ser iterado ate $k = 0$

$$Z^{(n)}(h) = \int Dz \left(Z^{(m_1)}(\sqrt{\beta q_0}z + h) \right)^{\frac{n}{m_1}} \tag{1.28}$$

Esta equação é importante para o passo final. Note que nela aparece q_0, e não uma diferença $q_{k-1} - q_k$.

Vamos tomar o limite $n \to 0$ e há mais de uma forma de fazé-lo. Precisamos entender que este problema não é o modelo hierárquico. O valor de q_{ab} está entre zero e um (ver equação 80, sec 4.3.2). Temos também

$$n \equiv m_0 \geq m_1 \geq m_2 \geq ... \geq 1 \tag{1.29}$$

Introduzimos uma váriavel x que descreve no limite o tamanho das caixas m_k, como função das escalas. Para a passagem de k a $k+1$,

$$\epsilon = m_k - m_{k+1}, \tag{1.30}$$

e portanto, dividindo por m_{k+1}

$$\frac{m_k}{m_{k+1}} = 1 + \frac{\epsilon}{x} \tag{1.31}$$

Defina, como antes

$$u(h, x) = -\log Z^{(x)}(h), \tag{1.32}$$

e a derivada

$$u_x := \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{u(h, x) - u(h, x - \epsilon)}{\epsilon}. \tag{1.33}$$

$$q_k - q_{k+1} = \frac{dq}{dx}\epsilon \tag{1.34}$$

Queremos o limite de

$$u(h, x) = -\log \int Dz e^{-(1+\frac{\epsilon}{x})u(h+\sqrt{\beta \frac{dq}{dx}}\epsilon z, x-\epsilon)} \tag{1.35}$$

onde usamos, pela eq. 1.30 que $m_{k+1} = m_k - \epsilon \to x - \epsilon$. Expandindo u em série até ordem ϵ

$$u(h, x) = -\log \int Dz \exp(-u(h, x) - u\frac{\epsilon}{x} + \epsilon u_x - u_h \sqrt{\beta \frac{dq}{dx}}\epsilon z - \frac{1}{2}u_{hh}\beta \frac{dq}{dx}\epsilon z^2 \tag{1.36}$$

Como $u(h,x)$ não depende de z

$$u(h,x) = u(h,x) - \log \int Dz \left(1 - u\frac{\epsilon}{x} + \epsilon u_x - \frac{1}{2}u_{hh}\beta\frac{dq}{dx}\epsilon z^2 + \frac{1}{2}u_h^2\beta\frac{dq}{dx}\epsilon z^2\right) \tag{1.37}$$

Usamos $\int zDz = 0$ e $\int z^2 Dz = 1$

$$u_x = \frac{u}{x} + \frac{\beta}{2}\frac{dq}{dx}(u_{hh} - (u_h)^2). \tag{1.38}$$

Finalmente definimos $f(h,x) = \frac{1}{x}\log Z$ ou $f = -u/x$, então $u_x = -xf_x - f$

$$-xf_x - f = -f + -x\frac{\beta}{2}\frac{dq}{dx}(f_{hh} + x(f_h)^2). \tag{1.39}$$

$$f_x = -\frac{\beta}{2}\frac{dq}{dx}(f_{hh} + xf_h^2). \tag{1.40}$$

esta é chamada a equação de Parisi. Da equação 1.28 temos que

$$Z^{(n)}(h) = \int Dz \left(Z^{(m_1)}(\sqrt{\beta(q_0)}z + h)\right)^{\frac{n}{m_1}} = e^{\beta q(0)\frac{\partial^2}{\partial h^2}} \left(Z^{(m_1)}(h)\right)^{\frac{n}{m_1}} \tag{1.41}$$

and the limite $n \to 0$ de

$$\frac{1}{n}\log Z^{(n)}(h) = \frac{1}{n}\log \int Dz \left(1 + \frac{n}{m_1}\log Z^{(m_1)}(h)\right) \tag{1.42}$$

$$\lim_{n\to 0}\frac{1}{n}\log Z^{(n)}(h) = \int Dz f(x, \sqrt{\beta q(0)}z + h)|_{x=0} \tag{1.43}$$

1.3 A energia Livre

Obtivemos seção 4.3, eq. 72 a energia livre

$$f_R(\{q_{ab}\},\{m_a\}) = -\frac{\beta J^2}{4} + \frac{\beta J^2}{2n}\sum_{a<b} q_{ab}^2 + \frac{J_0}{2n}\sum_a m_a^2 - \frac{1}{n\beta}\log \mathcal{Z}. \tag{1.44}$$

O último termo, o mais difícil já foi discutido, os outros serão agora. Por agora vamos estudar $J_0 = 0$.

Se o ponto de sela for réplica simétrico teremos

$$\sum_{ab} q_{ab}^r = q_0^r n^2 \tag{1.45}$$

mas fizemos um erro se não for RS para todos os pares que $q_{ab} \neq q_0$ que precisamos consertar, além de tratar a diagonal de forma errada, pois não há termos na diagonal. No próximo passo de quebra de simetria de réplica, temos $\frac{n}{m_1}$ caixas com m_1^2 termos cada

$$\sum_{ab} q_{ab}^r = q_0^r(n^2 - n) + (q_1^r - q_0^r)(\frac{n}{m_1}m_1^2 - n) \tag{1.46}$$

onde as substrações de n levam em conta os termos da diagonal. Para o segundo passo consideramos que há $\frac{m_1}{m_2}$ caixas dentro de cada uma das $\frac{n}{m_1}$ caixas do passo anterior, mas ainda os mesmos n temos na diagonal. Vemos que no caso geral, após k passos de quebra:

$$\begin{aligned}\sum_{ab} q_{ab}^r &= q_0^r(n^2-n) + (q_1^r - q_0^r)(\frac{n}{m_1}m_1^2 - n) + (q_2^r - q_1^r)(\frac{n}{m_1}\frac{m_1}{m_2}m_2^2 - n) + ... \\ &= n\left(q_0^r(m_0 - m_1) + q_1^r(m_1 - m_2) + ...\right) - nq_k^r \end{aligned} \tag{1.47}$$

e usando a equação 1.30 vemos que podemos escrever (note que $\frac{1}{n}(n^2-n) \overset{n\to 0}{\to} = -1$)

$$\frac{1}{n}\sum_{a<b} q_{ab}^r = \frac{1}{2n}\sum_{ab} q_{ab}^r = -\frac{1}{2}\int_0^1 q(x)^r dx + \frac{1}{2}q^r(1) \tag{1.48}$$

assim a energia livre será

$$f_R(q(x),h) = -\frac{\beta J^2}{4}\left(1 + \int_0^1 q(x)^2 dx - q^2(1)\right) - \int Dz f(0, \sqrt{\beta q(0)}\, z + h), \tag{1.49}$$

Lembramos que f é o ponto final da dinâmica descrita pela equação de Parisi. Podemos mudar o 'tempo' ou a escala x, e medir a evolução em termos do próprio q, assim $f_x = f_q/(\frac{dq}{dx}$ e usando a função inversa $x(q)$ temos

$$f_q = -\frac{\beta}{2}(f_{hh} + x(q)f_h^2). \tag{1.50}$$

1.4 Bibliografía

- D.U. Marchetti, Central Limit theorem for Hierarchical Spin model at criticality: Taming the heat sLEquation
- F. Dyson
- P. Collet and JP Eckmann: A renormalization group analysis of the hierarchical model in statistical mechanics. Lecture Notes in Physics 74 (1978)
- H. Nishimori, Statistical Physics of Spinglasses and Information Processing, an Introduction