1. Seja D um aberto, conexo e limitado em $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$). Diz-se que uma função $u \in C^2(D)$ é subharmônica (respectivamente, superharmônica) em D se $\Delta u \geq 0$ (respectivamente, $\Delta u \leq 0$) em D. Prove que o valor máximo (respectivamente, mínimo) de u é atingido na fronteira de D. Dê um exemplo para mostrar que isso não é verdade para o valor mínimo (respectivamente, máximo).

2. (Exterior do Disco) Sejam $a > 0$ e $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x^2 + y^2 > a^2\}$. Considere o problema de Dirichlet para a equação de Laplace em Ω:

$$\begin{gathered} \Delta u = 0 \quad \text{em } \Omega \\ u(a, \theta) = h(\theta) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ |u| \leq M \quad \text{em } \Omega \end{gathered}$$

com $h \in C^1(\mathbb{R})$, periódica com período 2π.

a) Use o método de separação de variáveis para determinar a solução deste problema de Dirichlet.

b) Encontre a seguinte fórmula de Poisson para o problema no exterior do disco:

$$u(r, \theta) = \frac{r^2 - a^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(\phi)}{r^2 - 2ar\cos(\theta - \phi) + a^2} d\phi$$

para $r > a$.

c) Observe que se removermos a condição de limitação de u ($|u| \leq M$ em Ω), então o problema possui infinitas soluções.

d) Escreva a solução do problema com condição de fronteira $h(\theta) = 1 + 3\sin\theta$ em $r = a$ e a condição de limitação de u.

3. (Este exercício é um corolário do princípio de máximo para a equação de Laplace) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto, limitado e conexo e $g \in C(\partial\Omega)$. O problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

tem no máximo uma solução pertencente a $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Além disso, sejam $g_1, g_2 \in C(\partial\Omega)$. Mostre que:

a) *Comparação*: se $g_1 \geq g_2$ em $\partial\Omega$ e $g_1 \neq g_2$ em pelo menos um ponto de $\partial\Omega$, então

$$u_{g_1} > u_{g_2} \quad \text{em } \Omega.$$

b) *Estabilidade*:

$$\max_{\overline{\Omega}} |u_{g_1} - u_{g_2}| = \max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2|.$$

4. Prove a unicidade do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

pelo método de energia. Isto é, após subtrair duas soluções $w = u - v$, multiplique a equação de Laplace em w por w e use o teorema da divergência.

5. Considere problema de Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Encontre uma condição necessária para a existência de solução do problema. (Sugestão: use o teorema da divergência.)

6. Seja $B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Use o método da separação de variáveis para resolver o problema

$$\begin{cases} \Delta u = y & \text{em } B_1 \\ u = 1 & \text{sobre } \partial B_1 \end{cases}$$

Sugestão: Use $u = v + w$ onde v e w são as respsctivas soluções dos problemas:

$$\begin{cases} \Delta v = y & \text{em } B_1 \\ v = 0 & \text{sobre } \partial B_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta w = 0 & \text{em } B_1 \\ w = 1 & \text{sobre } \partial B_1 \end{cases}$$

7. Seja u uma função harmônica e não negativa numa bola $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$.

   a) Use a fórmula de Poisson para a mostrar a desigualdade de Harnack:

$$\frac{R - |x|}{R + |x|} u(0) \leq u(x) \leq \frac{R + |x|}{R - |x|} u(0), \quad \forall\, x \in B_R(0).$$

   b) Mostre que

$$\max_{B_{R/2}(0)} u \leq 9 \inf_{B_{R/2}(0)} u.$$

8. Seja u uma função harmônica em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, tal que $\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx < \infty$. Mostre que $u \equiv 0$.

   (Sugestão. Escreva a fórmula da média em $B_R(P)$ para u. Use a desigualdade de Schwarz e faça $R \to \infty$.)