

Lista 10 - MAT-330

(I) Seja α um ordinal. São equivalentes:

- (i) α é um ordinal limite.
- (ii) Para todo ordinal λ , se $\lambda < \alpha$ então $\lambda + 1 < \alpha$.

(II) Sejam β e γ números ordinais.

- (i) Se γ é ordinal limite então $\beta + \gamma$ é ordinal limite.
- (ii) Se γ é ordinal limite então $\beta \cdot \gamma$ é ordinal limite.

(III) Seja A um conjunto de ordinais. Prove:

- (i) $\bigcup A$ é um ordinal.
- (ii) Se $\bigcup A$ é um ordinal sucessor então $\bigcup A \in A$ (portanto, $\bigcup A$ é máximo do conjunto A).

(IV) Observe que $1 + \omega = 2 + \omega = \omega$, mas $1 \neq 2$. Prove que, dados α, β ordinais e $n \in \omega$, se $\alpha + n = \beta + n$ então $\alpha = \beta$.

(V) Sejam α, β ordinais. Se $\beta < \alpha < \beta + \omega$ então existe um único $n \in \omega$ tal que $\alpha = \beta + n$.

(VI) Sejam $(W_1, \leq_1)$ e $(W_2, \leq_2)$ conjuntos bem ordenados, com $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. A soma de W_1 e W_2 é definida como $(W, \leq)$, sendo:

- (i) $W = W_1 \cup W_2$;
- (ii) dados $x, y \in W$,
$$\begin{cases} x, y \in W_1 \Rightarrow x \leq y \text{ se } x \leq_1 y \\ x, y \in W_2 \Rightarrow x \leq y \text{ se } x \leq_2 y \\ x \in W_1, y \in W_2 \Rightarrow x \leq y \end{cases}$$

Se $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$, trocamos W_1 por $W_1 \times \{0\}$ e W_2 por $W_2 \times \{1\}$.

Designamos $W = W_1 + W_2$. Prove que, dados ordinais α_1 e α_2 , se $(W_1, \leq_1) \approx \alpha_1$ e $(W_2, \leq_2) \approx \alpha_2$ então $W = W_1 + W_2 \approx \alpha_1 + \alpha_2$.

(VII) Dados α e β ordinais, prove que $\alpha \cdot \beta = \{\alpha \cdot \eta + \xi : \eta < \beta \text{ e } \xi < \alpha\}$.

(VIII) Dados α e β números ordinais, considere $\alpha \times \beta$ com a ordem anti-lexicográfica:

Para $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \alpha \times \beta$,

$$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) \quad \text{se} \quad \begin{cases} x_2 < y_2 & \text{ou} \\ x_2 = y_2 & \text{e } x_1 < y_1 & \text{ou} \\ x_1 = y_1 & \text{e } x_2 = y_2 \end{cases}$$

Prove que $(\alpha \times \beta, \leq) \approx \alpha.\beta$.

(IX) Prove que todo ordinal limite é da forma $\omega.\beta$, para algum ordinal β .