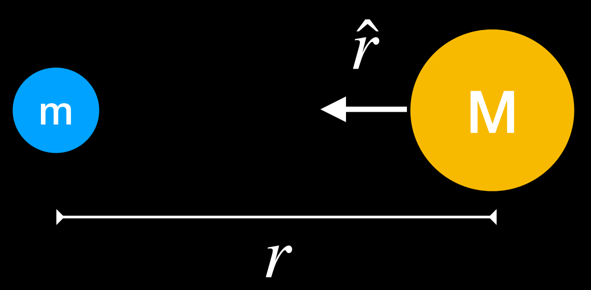
A Lei da Gravitação Universal

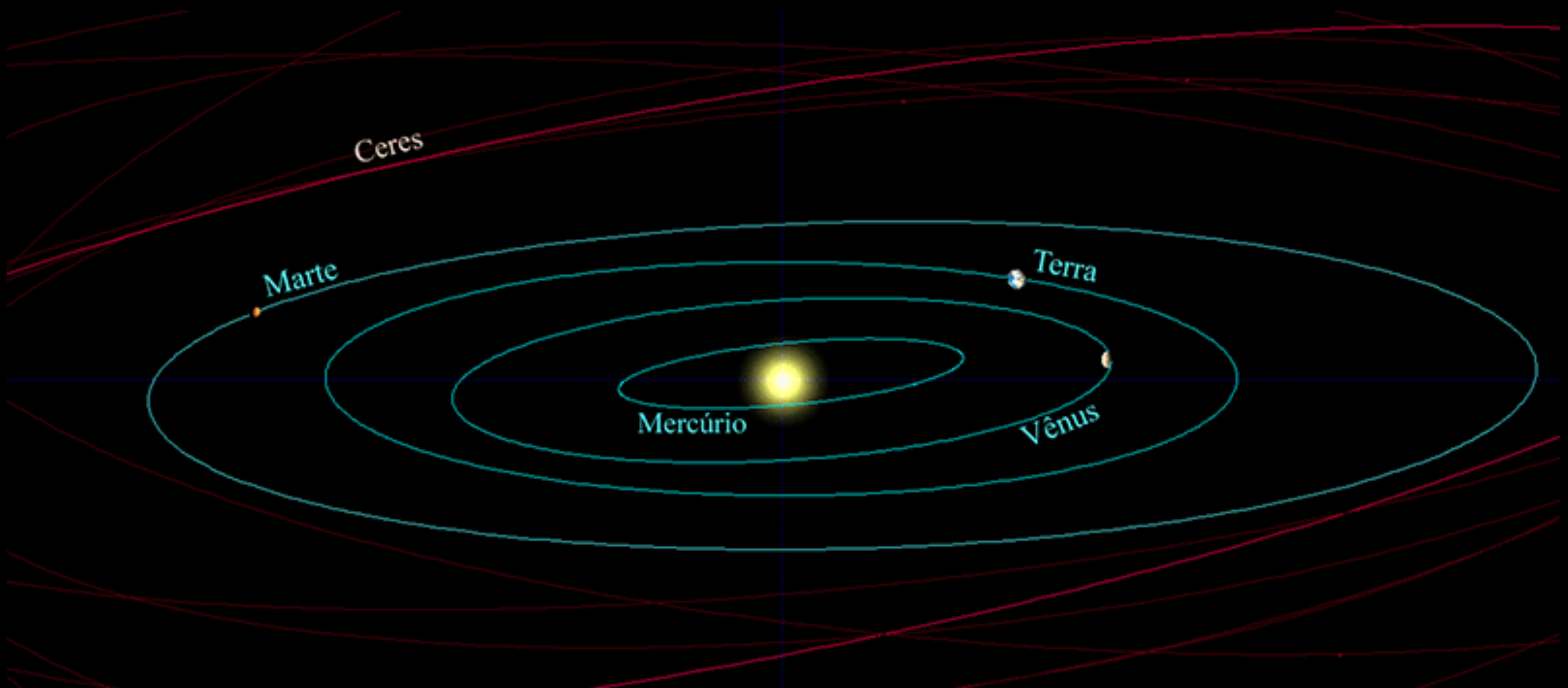
- Atração entre dois corpos, massas M e m:



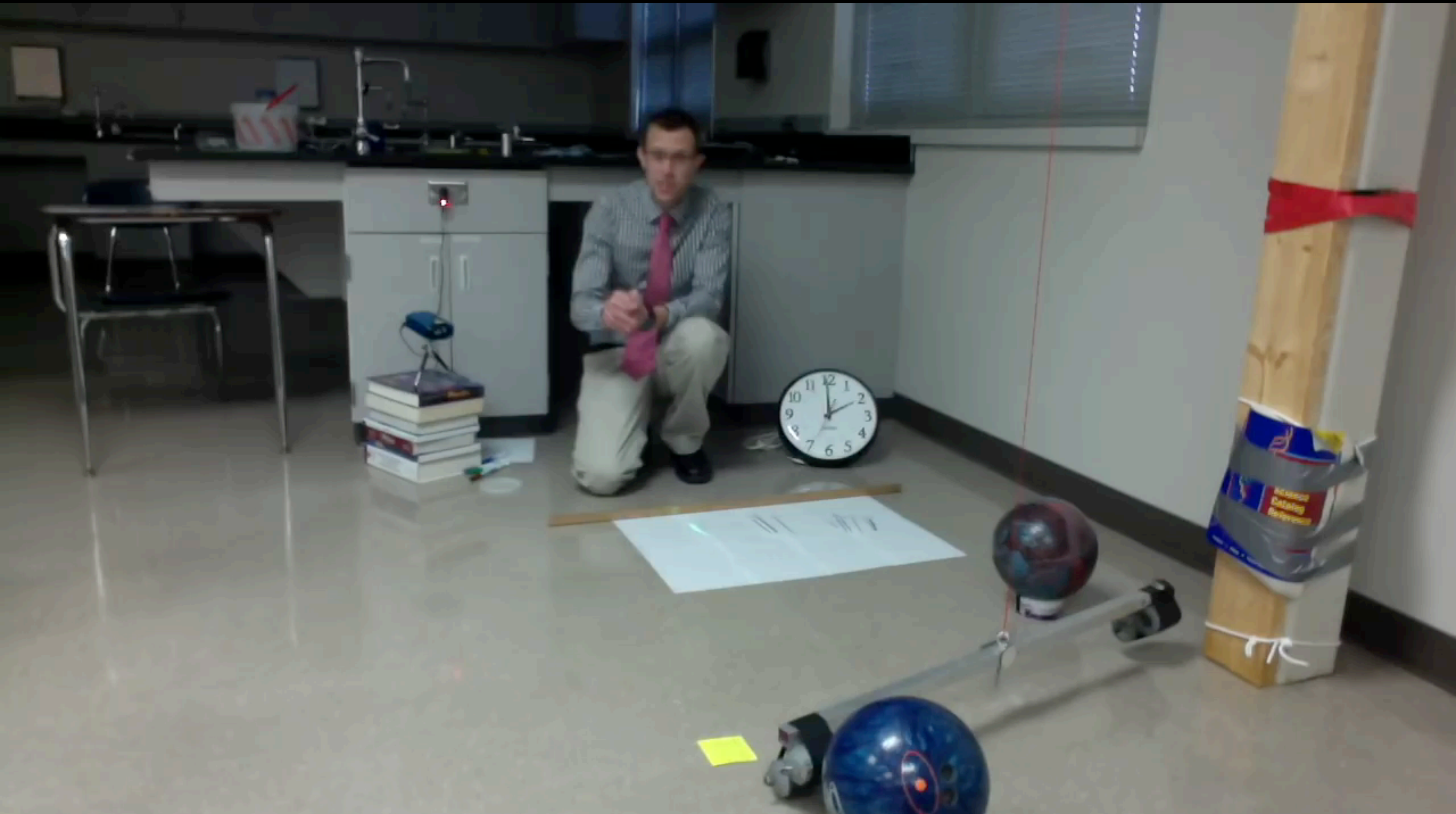
$$\vec{F} = -\,G\,M\,m\,\frac{1}{r^2}\,\hat{r}$$

- A constante de Newton é ***medida*** como sendo:

$$G = 6{,}674 \times 10^{-11}\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{m}^3\ \mathrm{s}^{-2}$$



Como medir a constante G



Balança de Cavendish

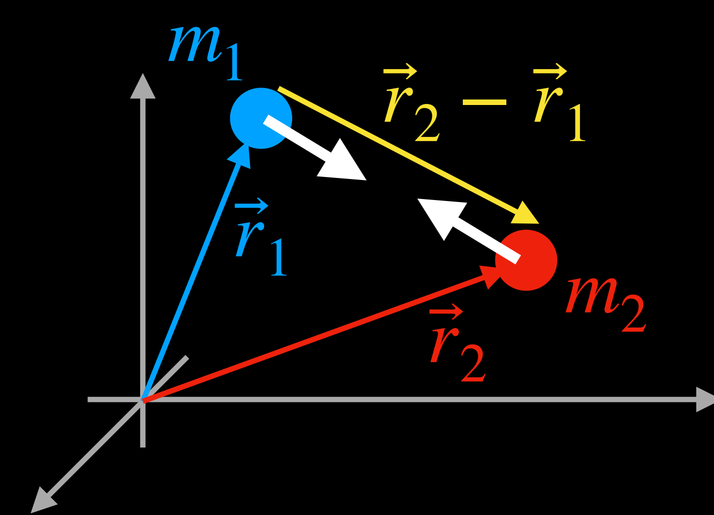
A Lei da Gravitação Universal

- Vamos escrever interação gravitacional de um modo mais geral, com a origem num ponto arbitrário:

$$\vec{F}_{1\to2} = -G\frac{m_1\, m_2}{\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)^2}\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

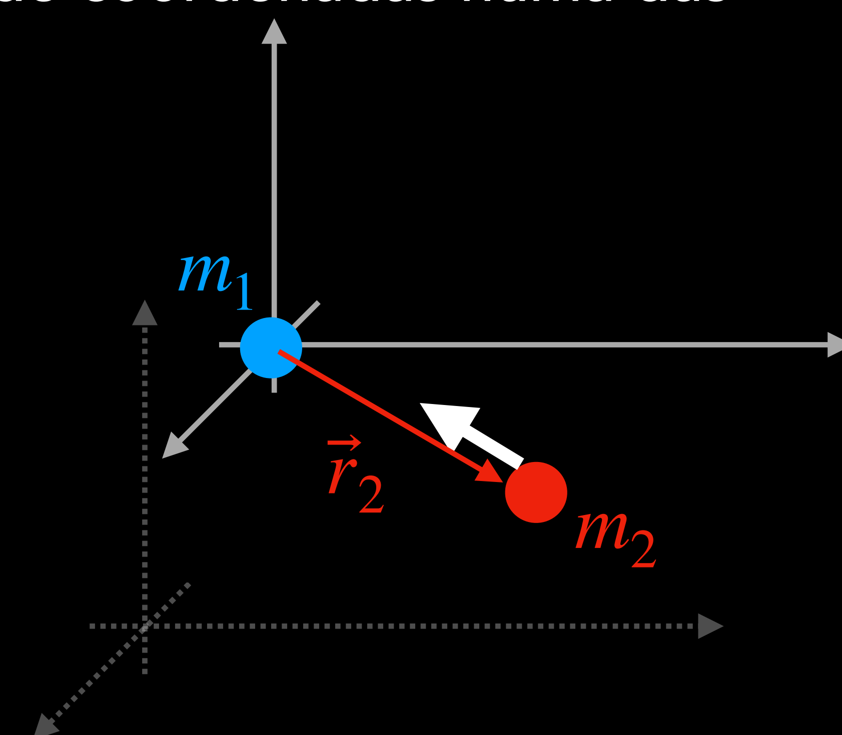
$$\vec{F}_{2\to1} = -G\frac{m_2\, m_1}{\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)^2}\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

$$\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1}$$



- Podemos, por simplicidade, posicionar o nosso sistema de coordenadas numa das massas — digamos, m_1 . Então, com $\vec{r}_1 \to \vec{0}$ temos:

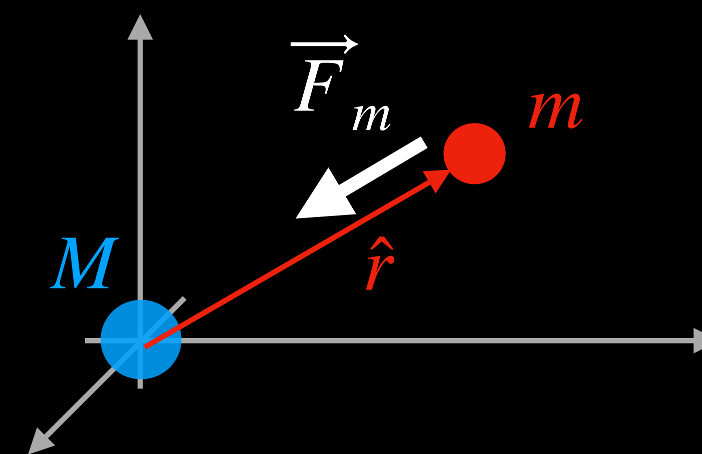
$$\vec{F}_2 = -G\frac{m_1\, m_2}{\left(\vec{r}_2 - \vec{0}\right)^2}\frac{\vec{r}_2 - \vec{0}}{|\vec{r}_2 - \vec{0}|} = -G\frac{m_1\, m_2}{r_2^2}\hat{r}_2$$



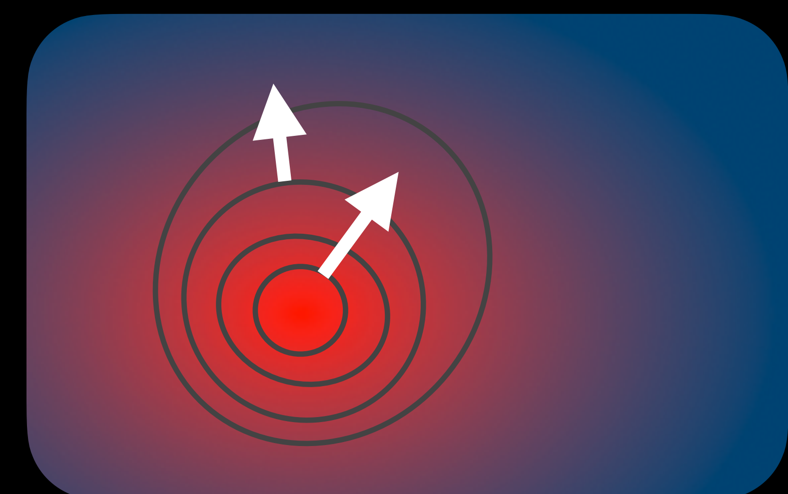
A Lei da Gravitação Universal

- Podemos escrever, de um modo mais compacto, que a força gravitacional de M em m é dada por:

$$\vec{F}_G = -G\frac{M\,m}{r^2}\hat{r}$$



- Forças dessa natureza têm uma característica fundamental, que as distingue de todas as outras: elas são ***forças conservativas.***

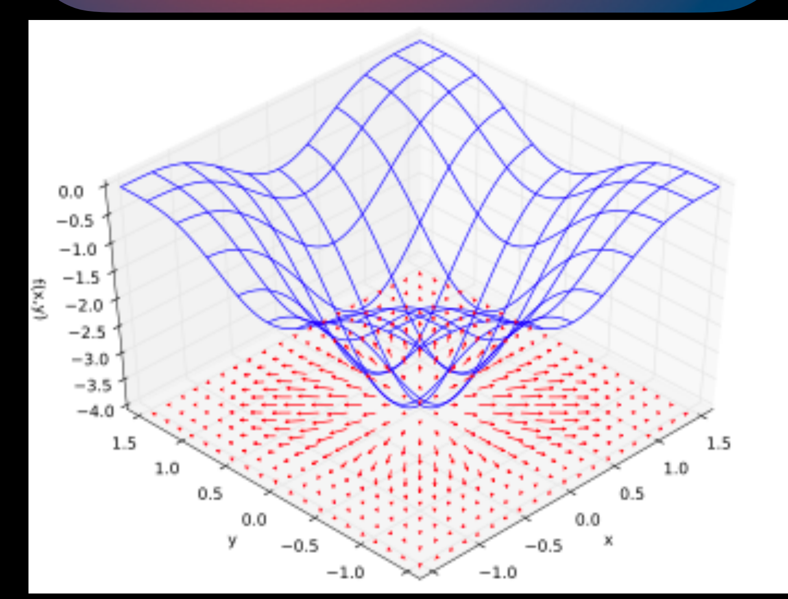


- Uma força conservativa pode ser expressa como o ***gradiente*** de uma função escalar — a ***energia potencial***:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\,U(\vec{r})$$

- Lembrem-se da definição do gradiente: ele é uma "derivada vetorial", e indica como uma função ***varia no espaço*** — tanto a ***direção*** da mudança quanto a ***intensidade:***

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$



Forças conservativas

- No caso particular da força gravitacional, a função $U_G(r)$ é:

$$U_G(r) = -\frac{GMm}{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_G = -GMm\frac{\vec{r}}{r^3}$$

- Para mostrar isso, note que:

$$\vec{\nabla} r^2 = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

$$= \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}x^2 + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}y^2 + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}z^2 = 2\left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right) = 2\vec{r}$$

- Mas $\vec{\nabla} r^2 = 2\,r\vec{\nabla} r$, portanto $\vec{\nabla} r = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}$. Assim, obtemos que:

$$-\vec{\nabla} U_G = \vec{\nabla}\left(\frac{GMm}{r}\right) = GMm\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = GMm\left(-\frac{1}{r^2}\right)\vec{\nabla} r$$

- Portanto, usando que $\vec{\nabla} r = \hat{r}$ acabamos de mostrar que:

$$-\vec{\nabla} U_G = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} = \vec{F}_G$$

Energia potencial

- O fato de que a força pode ser expressa desse modo (como o ***gradiente de uma função***) tem uma importância fundamental, que vamos explorar a seguir.

- Vamos calcular o ***trabalho*** realizado pela força no corpo de massa m, ao longo da trajetória dessa partícula. Para uma ***força qualquer*** temos:

$$W_{A\to B} = \int_A^B d\vec{\ell} \cdot \vec{F}$$

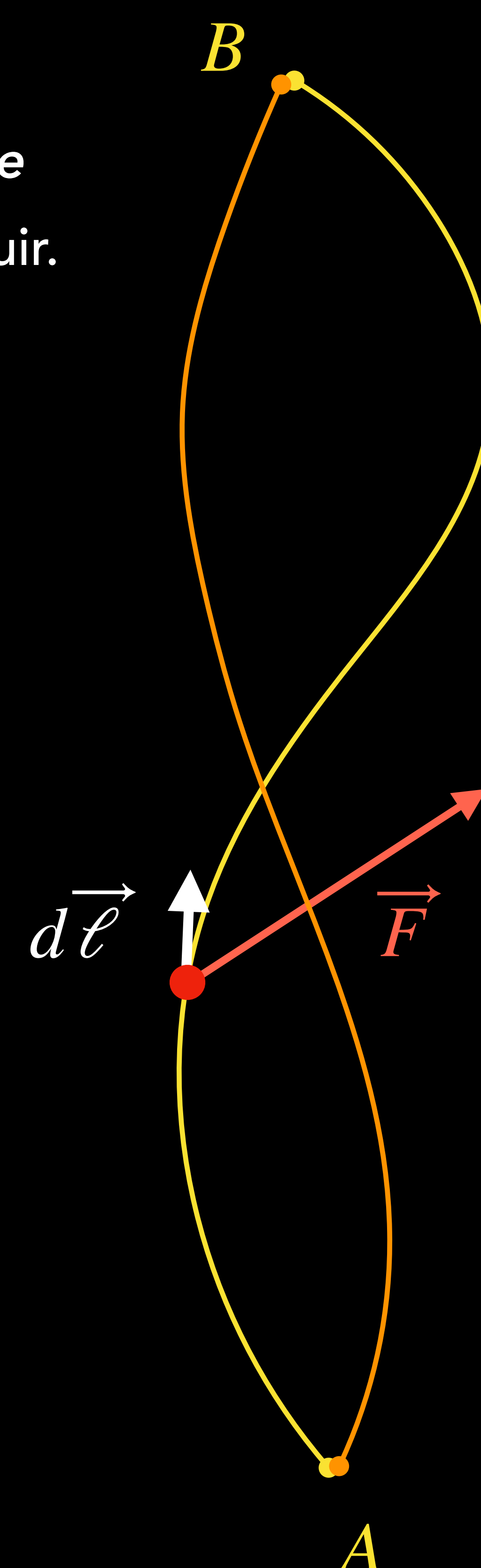
- No caso de uma ***força conservativa*** temos:

$$W_{A\to B} = \int_A^B d\vec{\ell} \cdot \left(-\vec{\nabla} U\right)$$

- Mas o gradiente não é nada mais do que uma derivada vetorial, portanto:

$$W_{A\to B} = -\int_A^B d\ell \left(\hat{\ell} \cdot \vec{\nabla} U\right) = -\int_A^B d\ell \frac{dU}{d\ell} = -\left[U(B) - U(A)\right]$$

- Note que isso ***não depende do caminho*** que leva de A a B !!!



Energia potencial

- O trabalho não é nada mais do que a ***variação da energia cinética*** do corpo:

$$W_{A\to B} = \Delta K_{A\to B} = \int_A^B d\vec{\ell} \cdot \vec{F}$$

- Por outro lado, vimos que essa mesma variação pode ser escrita como:

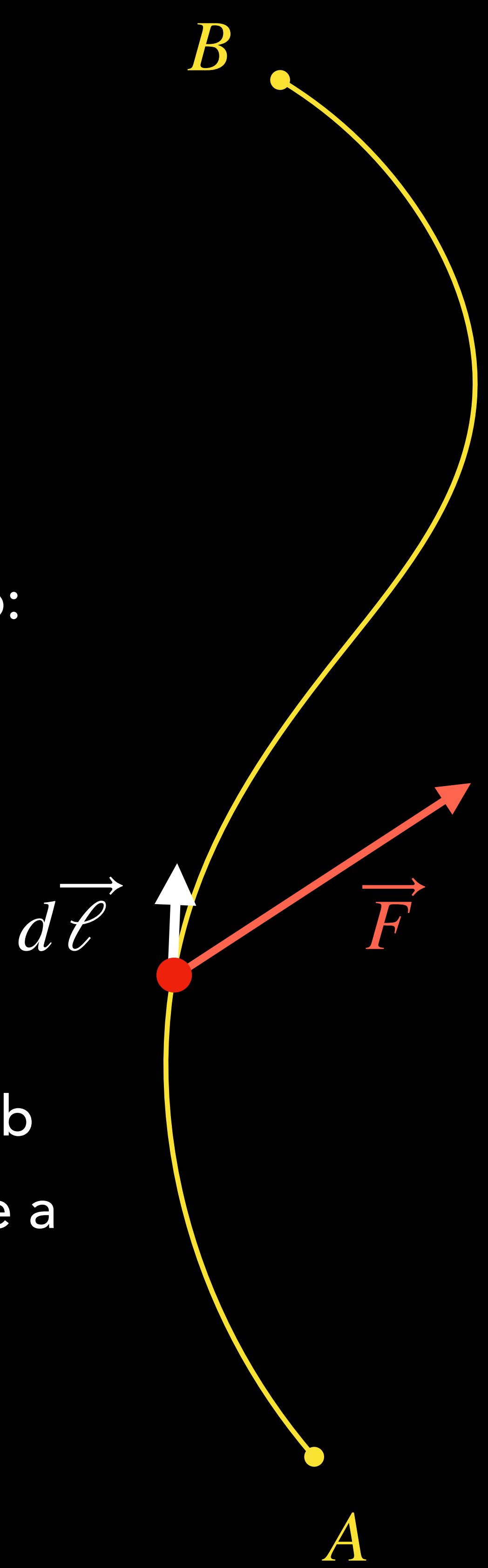
$$W_{A\to B} = -\,\Delta U_{A\to B} = -\,\left[U(B) - U(A)\right]$$

- Podemos escrever essa igualdade como:

$$\Delta K_{A\to B} + \Delta U_{A\to B} = 0$$

- Ou seja: o que encontramos é que toda vez que um corpo se move sob a influência de uma força conservativa, o que ocorre é uma ***troca*** entre a energia cinética e a função U, que chamamos de "energia potencial":

$$K + U = E = \text{const.} \quad \Longrightarrow \quad \Delta K + \Delta U = 0$$



Energia potencial

- Para colocar isso de um modo intuitivo:

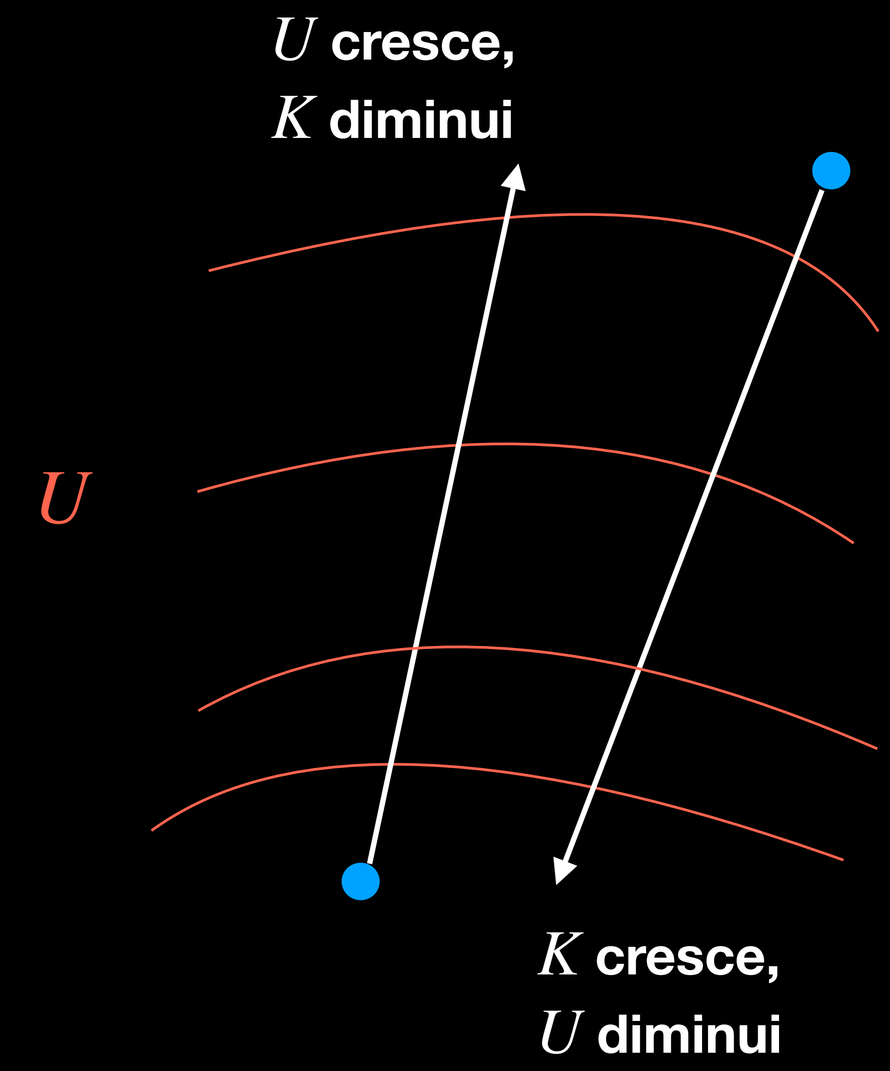
$$\Delta K + \Delta U = 0$$

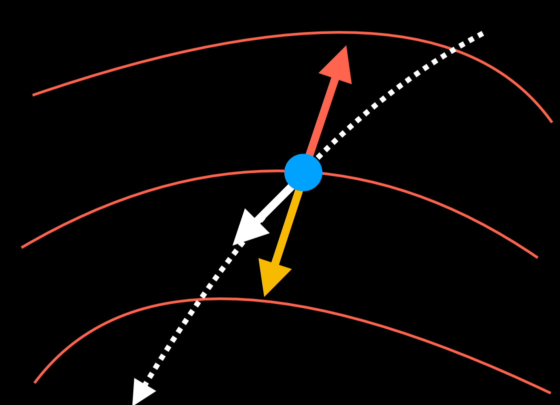
(a) se a energia cinética cresce, a energia potencial diminui

(b) se a energia cinética cai, a energia potencial aumenta

- Também é útil lembrar que a energia cinética aumenta quando o movimento se alinha à força:

$$\Delta K = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = (-\vec{\nabla} U) \cdot \Delta \vec{r}$$





Energia potencial

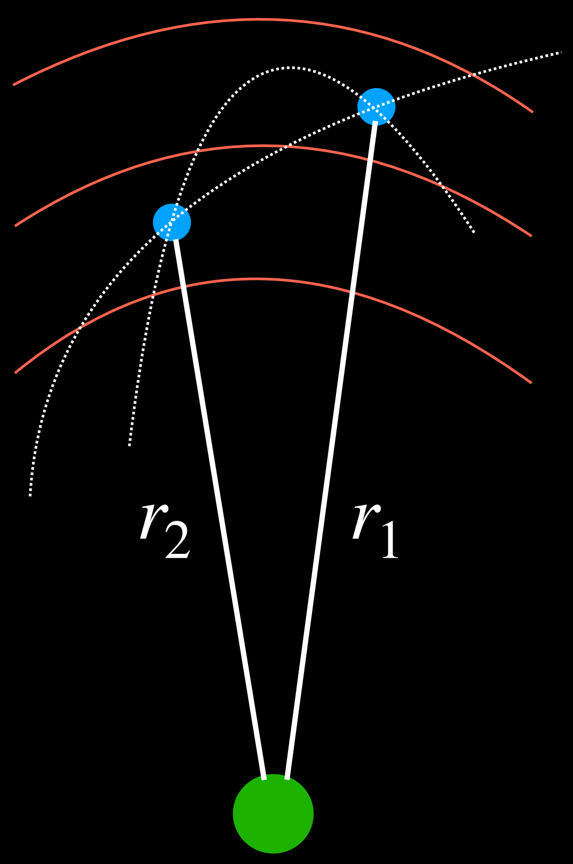
- No caso particular da força gravitacional, temos a ***energia potencial gravitacional***:

$$U_G(r) = -\frac{GMm}{r}$$

- De um ponto 1 a uma distância r_1 da massa M, até um ponto 2 a uma distância r_2 , a energia potencial gravitacional varia como:

$$\Delta U_{12} = U(r_1) - U(r_2)$$

$$= -\frac{GMm}{r_1} + \frac{GMm}{r_2} = GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$



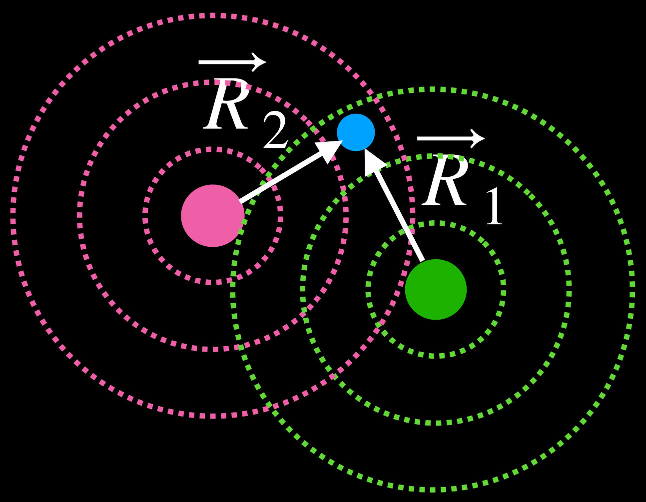
- Lembre-se que essa energia ***não depende do caminho***: a energia cinética que a massa m vai ganhar/perder no trajeto entre os dois pontos é dada apenas por ΔU_{12} !

Energia potencial

- O que acontece no caso na força gravitacional gerada por muitas massas (M_1 , M_2, …), cada uma numa posição ($\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, …)?
- Simples! Fazendo $\overrightarrow{R}_i = \vec{r} - \vec{r}_i$, temos que a força de ***cada uma*** é dada por:

$$\overrightarrow{F}_{Tot} = - GM_1 m \frac{\overrightarrow{R_1}}{R_1^3} - GM_2 m \frac{\overrightarrow{R_2}}{R_2^3} + \dots$$

$$= - \sum_i G M_i m \frac{\overrightarrow{R_i}}{R_i^3}$$



- Mas ***cada uma*** dessas forças pode ser expressa por uma energia potencial:

$$\overrightarrow{F}_i = - G M_i m \frac{\overrightarrow{R_i}}{R_i^3} = - G M_i m \frac{\vec{r} - \overrightarrow{r_i}}{|\vec{r} - \overrightarrow{r_i}|^3}$$

$$= - \overrightarrow{\nabla} \left(- G M_i m \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right)$$

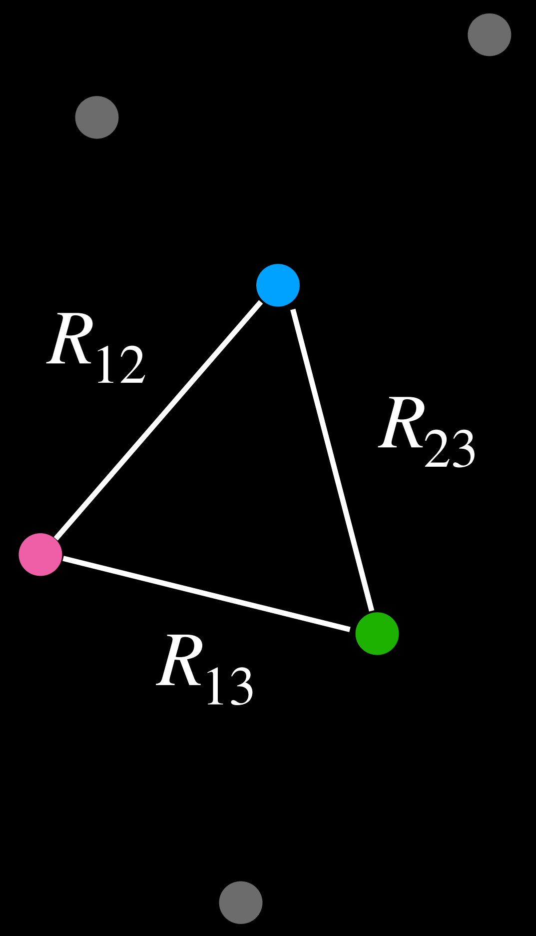
- Portanto, podemos expressar a força conjunta dessas massas pontuais em termos de uma energia potencial gravitacional ***total***:

$$\overrightarrow{F}_{Tot} = - \overrightarrow{\nabla} U_{Tot} \quad , \quad \text{onde} \quad U_{Tot} = \sum_i U_i = - \sum_i \frac{G M_i m}{R_i}$$

Energia potencial

- De um modo ainda mais geral, podemos expressar a ***energia potencial total*** de um ***sistema*** de N partículas ($i = 1,2,\ldots,N$)

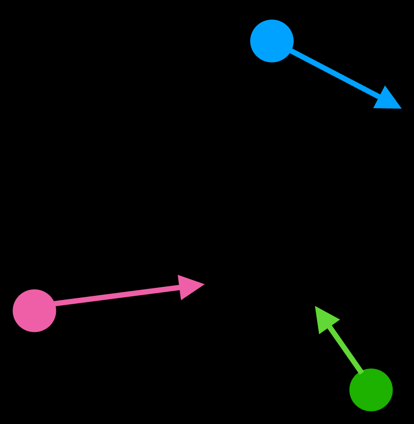
$$U_{Tot} = \sum_{j<i} \sum_{i=1}^{N} U_{ij} = - \sum_{j<i} \sum_{i=1}^{N} \frac{G M_i M_j}{R_{ij}}$$



O centro de massa

- E por falar num conjunto de partículas, vamos considerar um sistema de N massas pontuais (M_1 , M_2, …), em posições $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, …, e com velocidades $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, …).
- A ***quantidade de movimento (momento)*** **total** do sistema é:

$$\vec{P}_{Tot} = \sum_i M_i \vec{v}_i$$



- Podemos expressar esse momento total em termos do ***centro de massa*** (CM):

$$\vec{V}_{CM} = \frac{\vec{P}_{CM}}{M_{Tot}} \quad , \quad \text{onde} \quad M_{Tot} = \sum_i M_i$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{P}_{Tot} = M_{Tot} \vec{V}_{CM}$$

- E a ***energia cinética total*** desse sistema de partículas é:

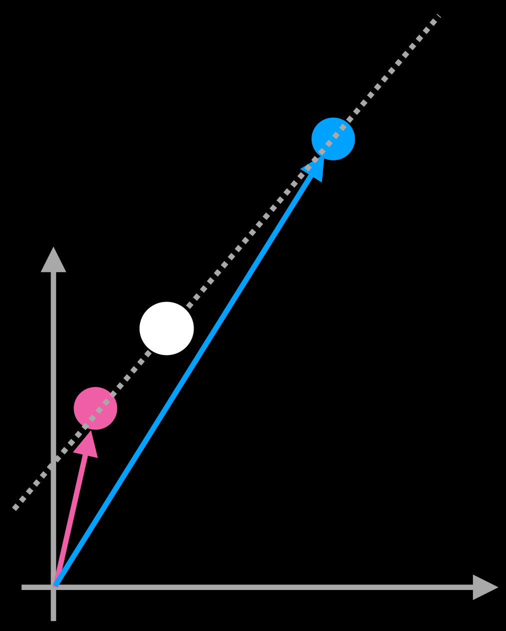
$$K_{Tot} = \sum_i \frac{1}{2} M_i \vec{v}_i^{\,2}$$

O centro de massa

- Dado um conjunto de partículas, a posição do CM é dada por:

$$M_{Tot}\,\vec{R}_{CM} = \sum_i M_i\,\vec{r}_i$$

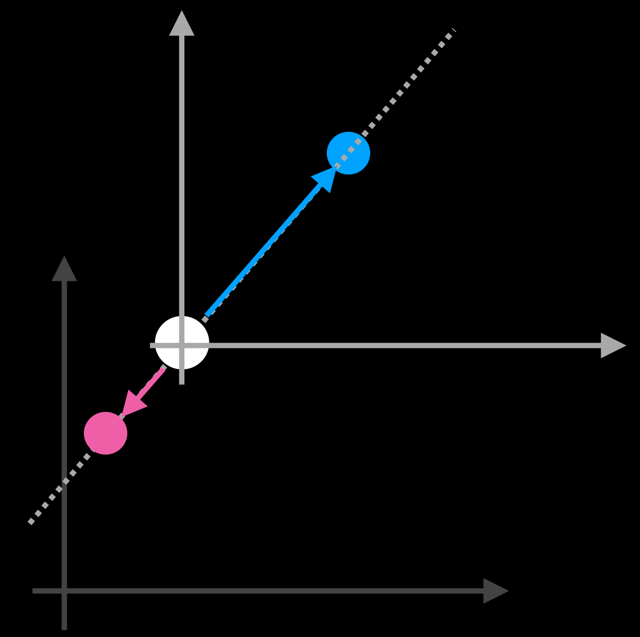
- Frequentemente é conveniente utilizar o referencial do CM, no qual $\vec{R}_{CM} \to \vec{0}$ (origem do sist. de coordenadas): $\vec{r}_i \to \vec{R}_i = \vec{r}_i - \vec{R}_{CM}$



- Corolário: para um par de partículas, o CM está posicionado entre as duas, na direção que liga as partículas — quaisquer que sejam as suas massas.

- No caso de duas partículas temos, <u>**no referencial do CM**</u>:

$$M_1\,\vec{R}_1 + M_2\,\vec{R}_2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{R}_1 = -\frac{M_2}{M_1}\vec{R}_2$$



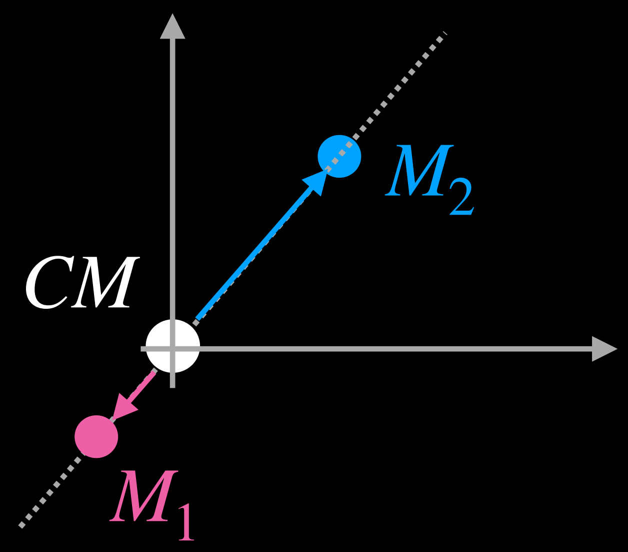
- A distância entre as duas partículas, $\vec{R}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, pode então ser escrita como:

$$\vec{R}_{12} = \vec{R}_2 + \frac{M_2}{M_1}\vec{R}_2 = \frac{M_1 + M_2}{M_1}\vec{R}_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{R}_2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2}\vec{R}_{12}$$

O centro de massa

- Agora podemos expressar a força gravitacional em termos dessa distâncias com relação ao CM. Temos:

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\frac{GM_1M_2}{R_{12}^3}\vec{R}_{12} = M_2\vec{a}_2 = M_2\ddot{\vec{R}}_2$$



- Usando a relação obtida acima, $\vec{R}_2 = \dfrac{M_1}{M_1+M_2}\vec{R}_{12}$, obtemos:

$$-\frac{GM_1M_2}{R_{12}^3}\vec{R}_{12} = \frac{M_1\,M_2}{M_1+M_2}\ddot{\vec{R}}_{12} = \mu\ddot{\vec{R}}_{12} \quad , \quad \text{onde}$$

$$\mu = \frac{M_1\,M_2}{M_1+M_2}$$ é a chamada ***massa reduzida***

- Note que, se trocarmos os papéis das duas partículas, obtemos:

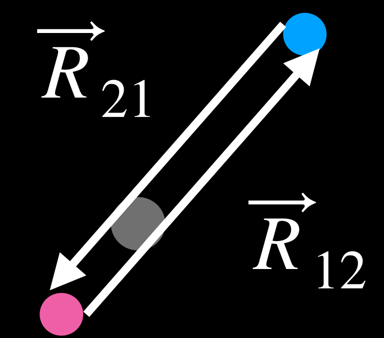
$$-\frac{GM_1M_2}{R_{21}^3}\vec{R}_{21} = \mu\,\ddot{\vec{R}}_{21} \quad ,$$

onde, claro, $\vec{R}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ e $\vec{R}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = -\vec{R}_{12}$

O centro de massa

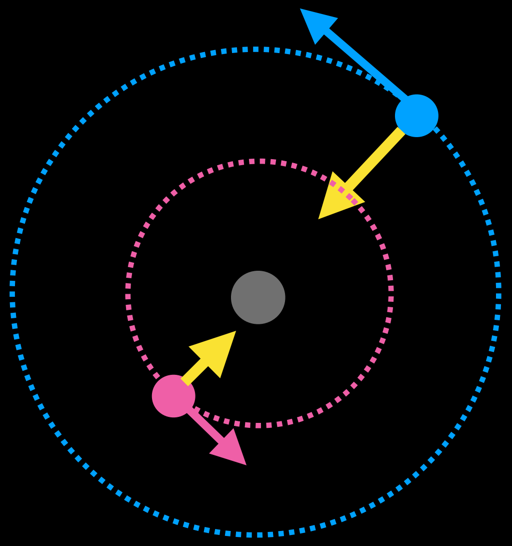
- Na prática, isso significa que podemos ***reduzir*** o problema de dois corpos (M_1 e M_2) a um problema muito mais simples, de ***uma só variável*** — seja ela $\vec{R}_{12}$ ou $\vec{R}_{21}$. Por exemplo, resolvemos:

$$-\frac{GM_1M_2}{R_{12}^3}\vec{R}_{12} = \mu\ddot{\vec{R}}_{12}$$

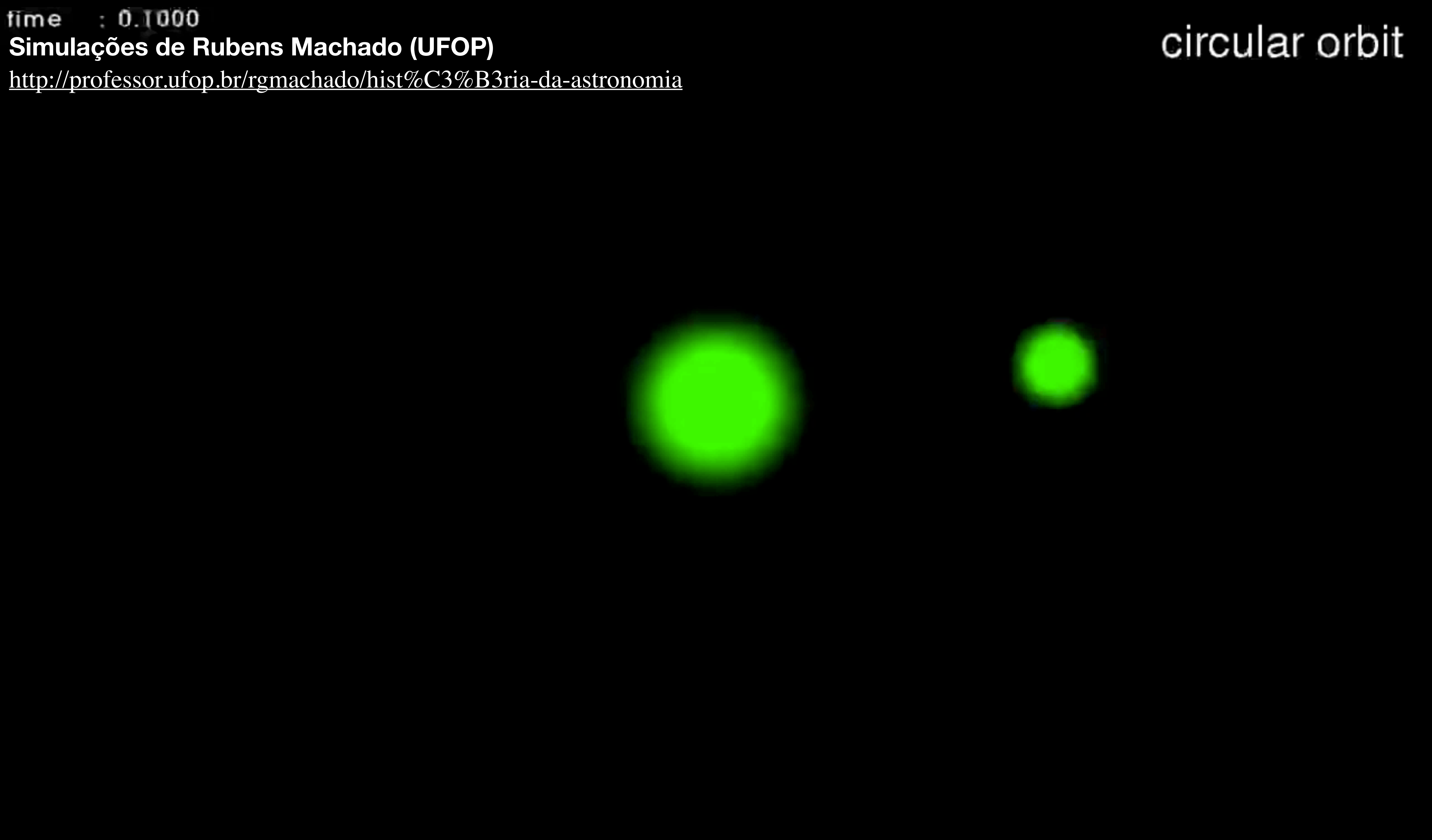


- Note que, após resolver essas equações e obter as trajetórias, podemos voltar e calcular a posição no referencial do CM, fazendo:

$$\vec{R}_2 = \frac{M_1}{M_1+M_2}\vec{R}_{12} \quad \textit{e} \quad \vec{R}_1 = \frac{M_2}{M_1+M_2}\vec{R}_{21} = -\frac{M_2}{M_1}\vec{R}_2$$



Trajetórias

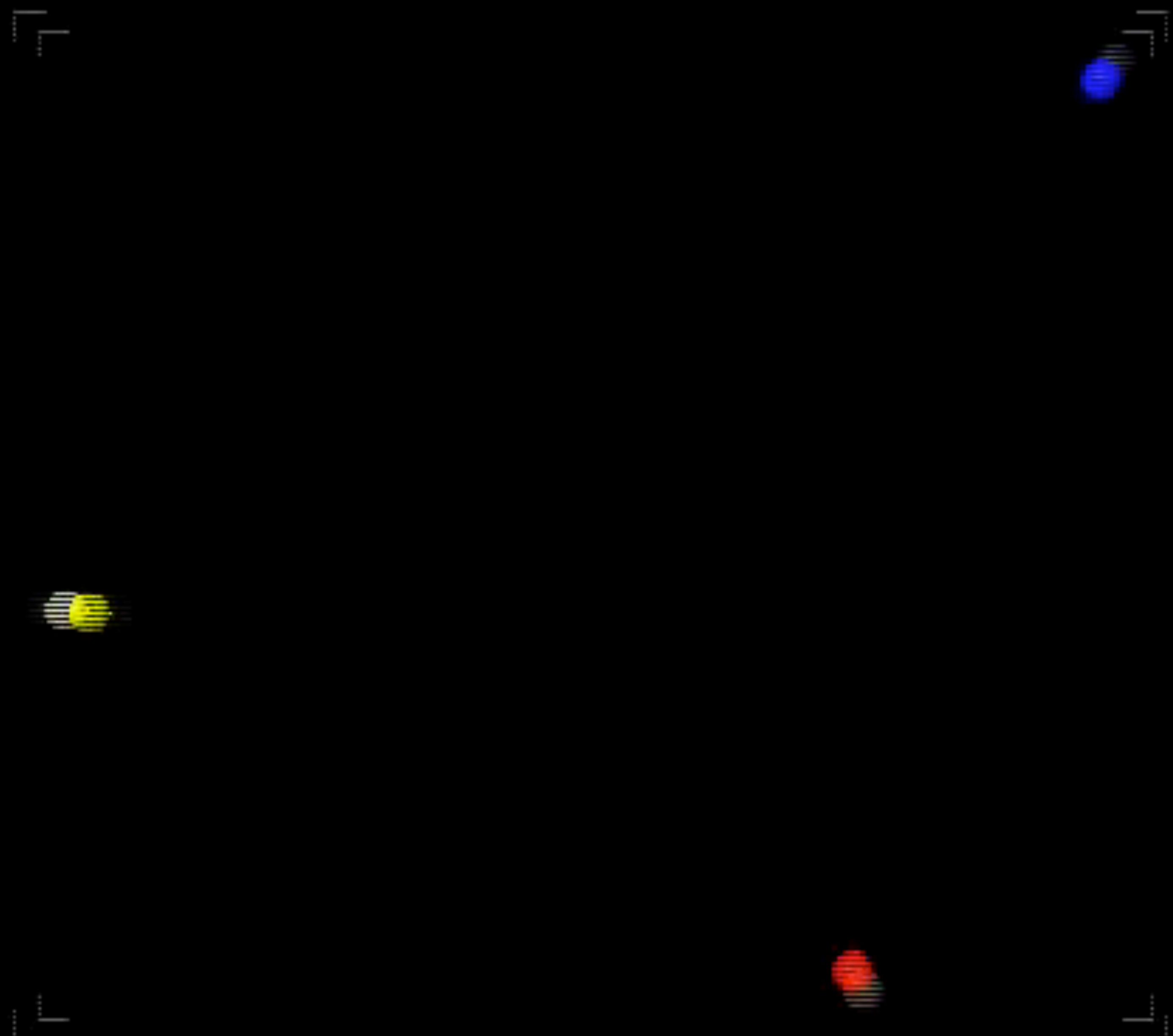


Simulações de Rubens Machado (UFOP)

http://professor.ufop.br/rgmachado/hist%C3%B3ria-da-astronomia

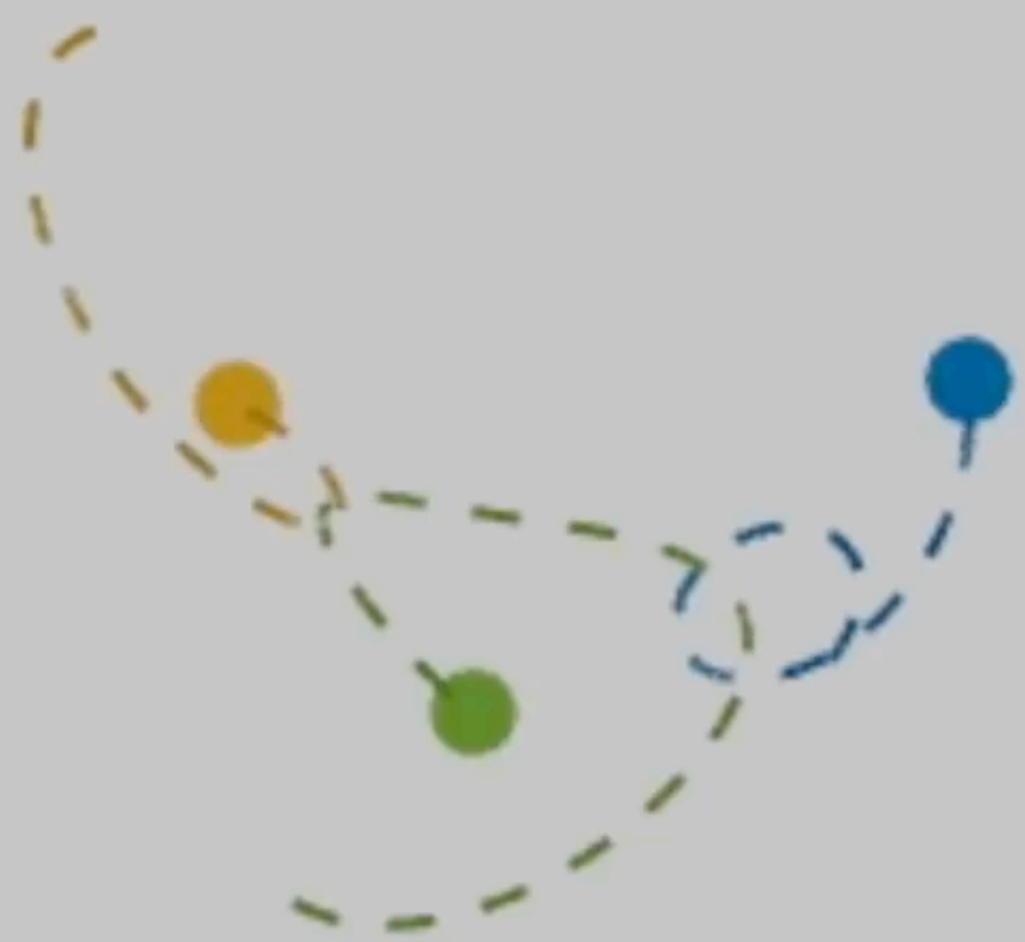
Problema de 2 corpos… e 3 corpos??

Trajetórias



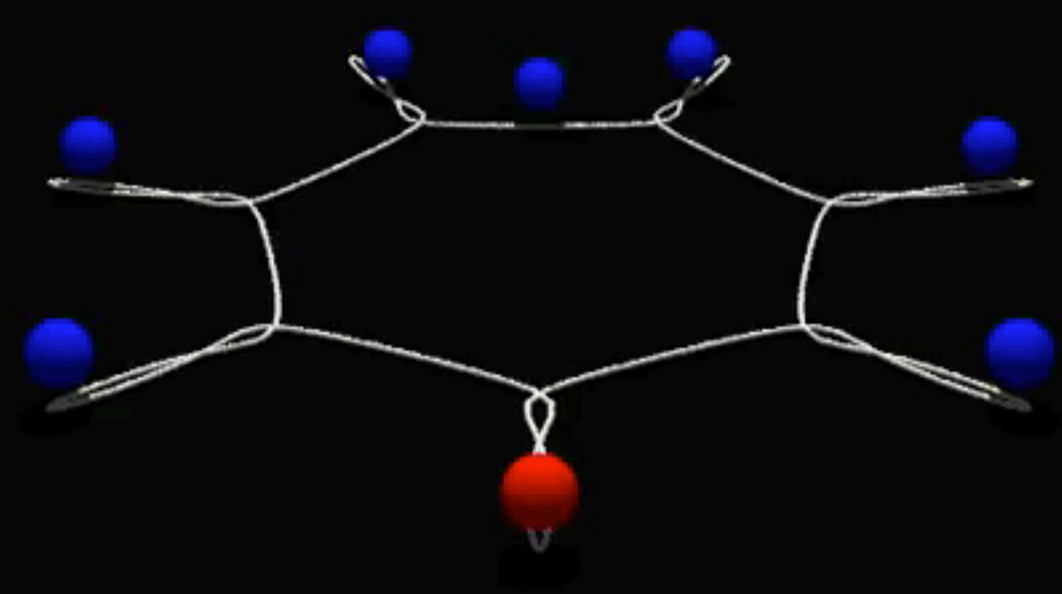
Problema de 3 corpos mais geral: **caos**!

Trajetórias



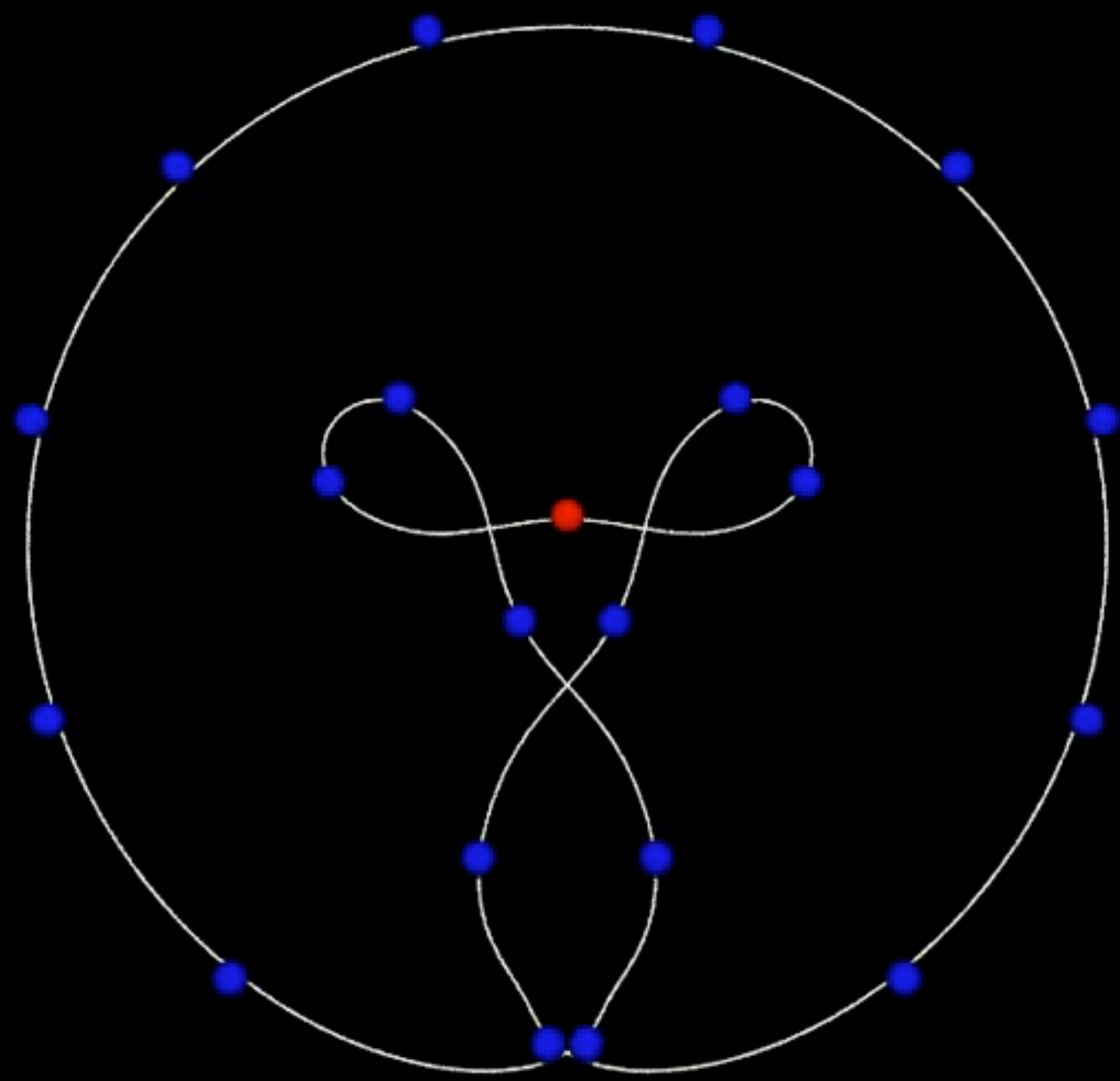
Problema de 3 corpos: algumas soluções periódicas!

Trajetórias



Problema de 8 corpos periódico

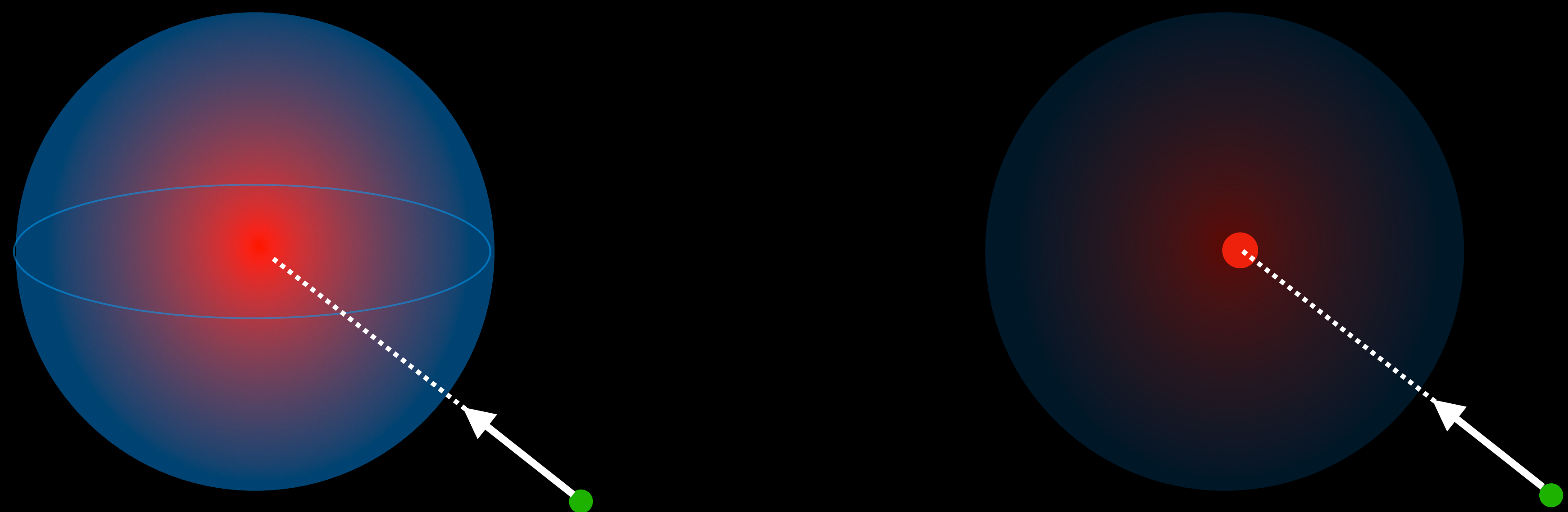
Trajetórias



Problema de 21 corpos periódico!

Teorema das cascas esféricas

- Seja uma ***distribuição esfericamente simétrica de massa***, de tal forma que a densidade do objeto é dada por $\rho = \rho(r)$:



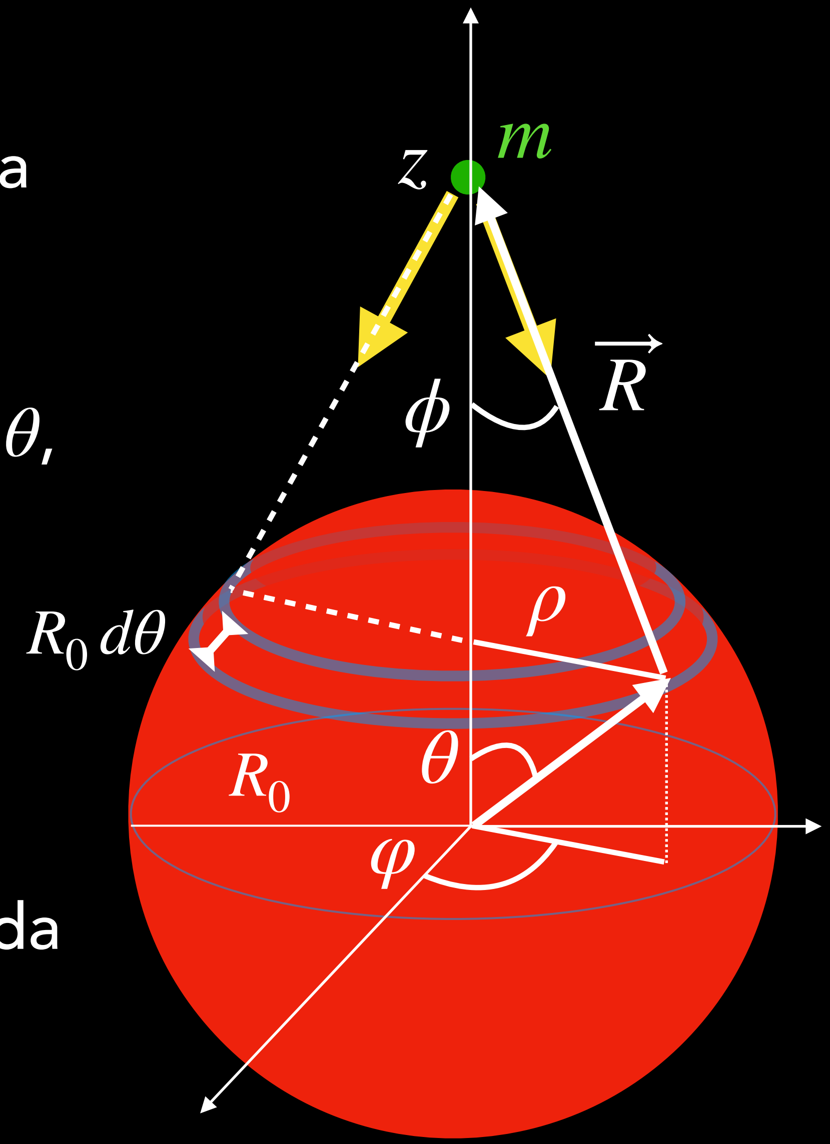
- O teorema nos diz que, desde que haja essa simetria esférica, a ***força gravitacional <u>total</u>*** de cada parte dessa distribuição de massa ***se combina*** de um tal modo que é como se ***toda a massa estivesse <u>no centro</u>*** da distribuição.

Teorema das cascas esféricas

- Vamos começar esse cálculo num caso simples, de uma ***casca esférica*** de raio R_0 e ***densidade superficial*** de massa $\sigma = M/A = M/(4\pi R_0^2)$.

- Comece considerando o ***anel*** que corresponde ao ângulo θ, com largura $d\theta$.

- Pela ***simetria por rotações*** em torno do eixo φ, só a componente da força ***na direção do eixo*** z não cancela nesse anel. Temos portanto que a força total do anel é dada por:



$$d\vec{F} = -\,G\,m\,dM\,\frac{1}{R^2}\,\left(\cancel{\text{sen}\,\phi\,\hat{\rho}} + \cos\phi\,\hat{z}\right) \quad \longrightarrow \quad -\,G\,m\,dM_{\text{anel}}\,\frac{1}{R^2}\,\cos\phi\,\hat{z}$$

onde $dM_{\text{anel}} = \sigma\,dA_{\text{anel}} = \sigma\,(2\pi\rho\,R_0\,d\theta) = \sigma\,2\pi\,(R_0\,\text{sen}\,\theta)\,R_0\,d\theta$

Teorema das cascas esféricas

- Agora é fácil — basta integrar!

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int \left[-G\, m\, dM_{\text{anel}} \frac{1}{R^2} \cos\phi\, \hat{z} \right]$$

$$= \int \left[-G\, m\, (\sigma\, 2\pi\, R_0^2 \,\text{sen}\, \theta\, d\theta) \frac{1}{R^2} \cos\phi\, \hat{z} \right]$$

- Pode parecer uma expressão muito complicada, já que a distância $R = R(\theta)$: para $\theta = 0$, $R = z - R_0$, e para $\theta = \pi$, $R = z + R_0$.

- De um modo totalmente geral, essa dependência está dada pela lei dos cossenos, ou seja:

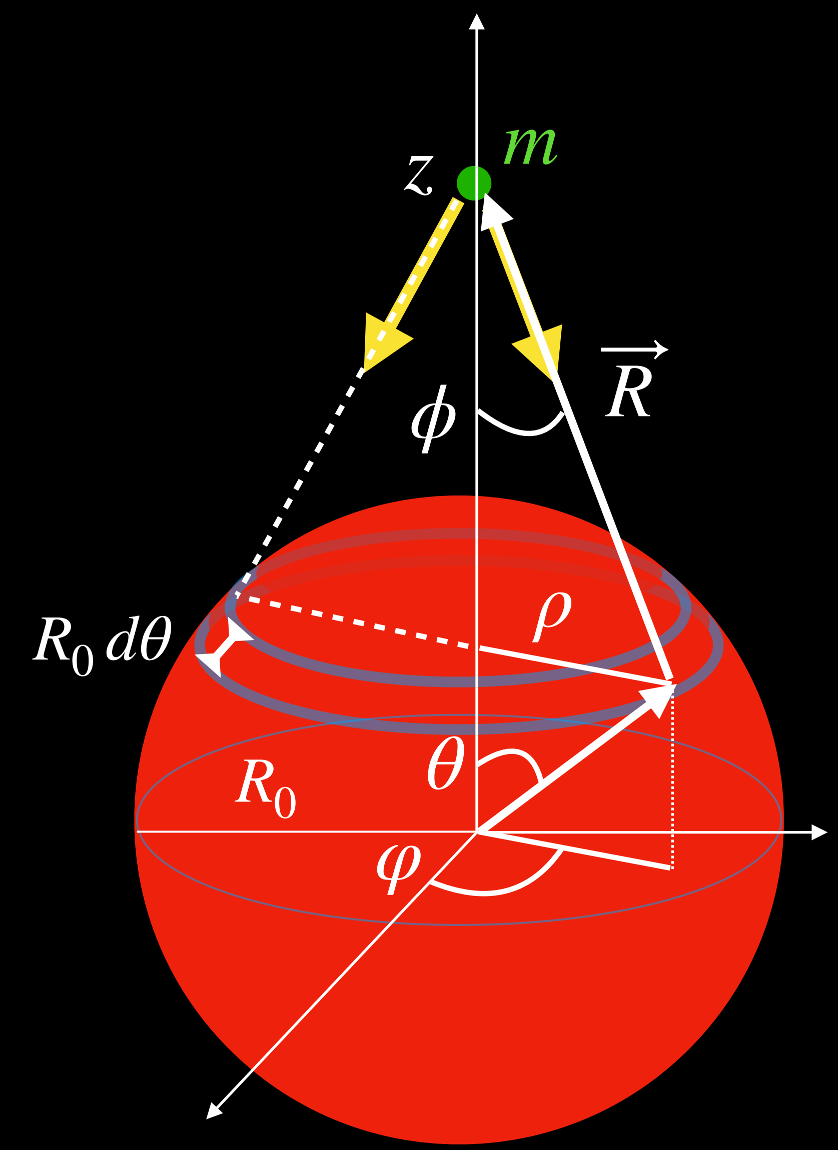
$$R^2 = R_0^2 + z^2 - 2\, R_0\, z\, \cos\theta$$

- Tomando a derivada com relação a θ temos:

$$2R \frac{dR}{d\theta} = -\, 2\, R_0\, z\, (-\text{sen}\, \theta\ )$$

- Finalmente, podemos expressar $\cos\phi$ pela lei dos cossenos:

$$R_0^2 = R^2 + z^2 - 2\, R\, z\, \cos\phi \quad , \quad \Rightarrow \quad \cos\phi = \frac{R^2 + z^2 - R_0^2}{2\, R\, z}$$



Teorema das cascas esféricas

- Substituindo as expressões obtidas, e usando que $\sigma = M/(4\pi R_0^2)$, temos:

$$\vec{F} = -G\,m\,M\,\hat{z} \int \frac{z^2 + R^2 - R_0^2}{4\,R_0\,z^2\,R^2} \frac{dR}{d\theta} d\theta$$

$$= -G\,m\,M\,\hat{z} \int_{z-R_0}^{z+R_0} \frac{z^2 + R^2 - R_0^2}{4\,R_0\,z^2\,R^2} dR$$

- Há muitos modos equivalentes de chegar em algo que é basicamente a mesma coisa. E agora ficou bem mais fácil:

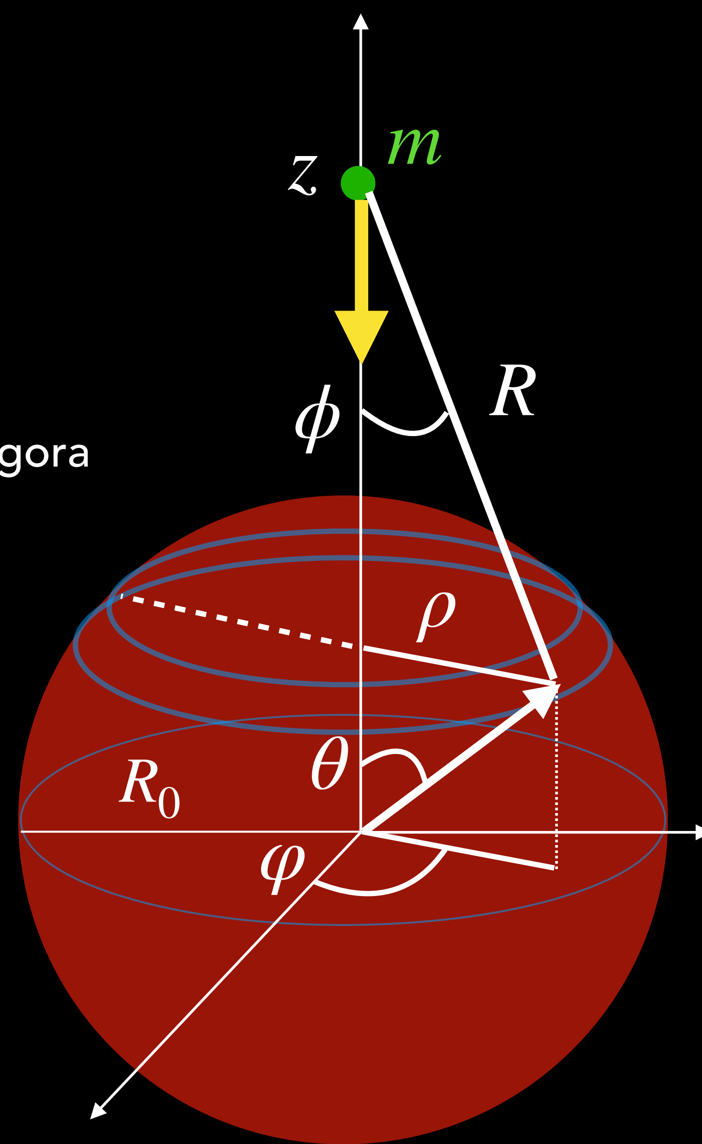
$$\vec{F} = -\frac{G\,m\,M}{4\,R_0\,z^2}\,\hat{z} \int_{z-R_0}^{z+R_0} \frac{z^2 + R^2 - R_0^2}{R^2} dR$$

$$= -\frac{G\,m\,M}{4\,R_0\,z^2}\,\hat{z} \left(\int_{z-R_0}^{z+R_0} \frac{z^2 - R_0^2}{R^2} dR \; + \; \int_{z-R_0}^{z+R_0} 1\,dR \right)$$

$$= -\frac{G\,m\,M}{4\,R_0\,z^2}\,\hat{z} \left[-(z^2 - R_0^2)\frac{1}{R}\Big|_{z-R_0}^{z+R_0} \; + \; R\Big|_{z-R_0}^{z+R_0} \right]$$

- O termo dentro das chaves dá ***exatamente*** $4\,R_0$, e portanto chegamos em:

$$\vec{F} = -\frac{G\,m\,M}{z^2}\,\hat{z}$$



Teorema das cascas esféricas

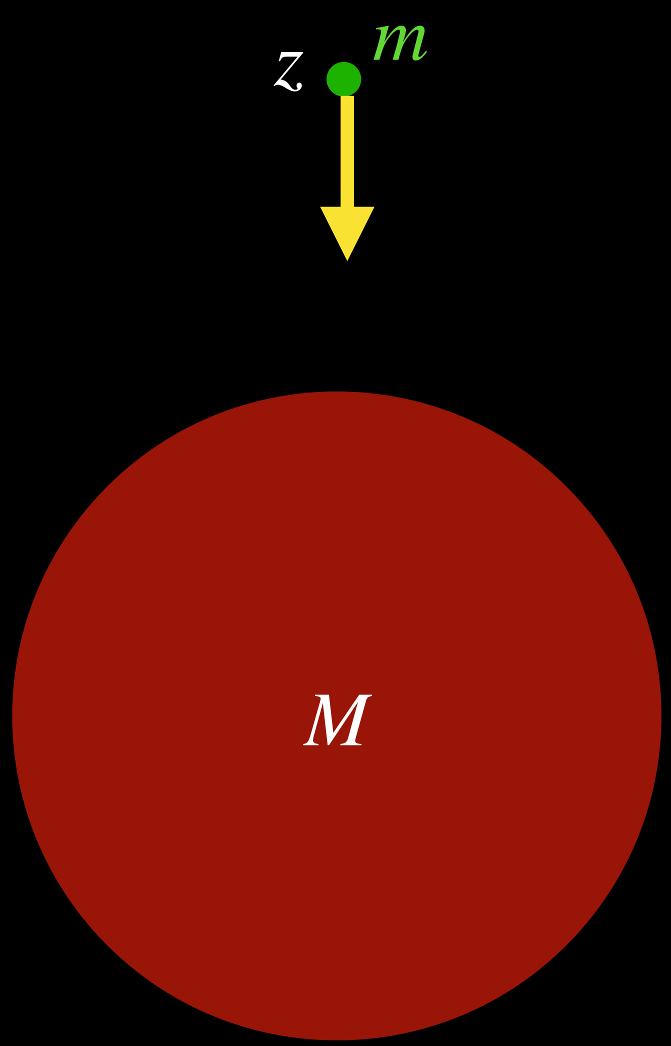
- Ou seja, a força causada por essa casca esférica de massa M é realmente idêntica à força que seria gerada por uma partícula pontual no centro da casca esférica!

$$\overrightarrow{F} = -\frac{G\, m\, M}{r^2}\,\hat{r}$$

- Um resultado que eu não demonstrei, mas que vocês podem mostrar facilmente, é que, se a massa m estiver ***dentro*** da casca esférica, a força se anula!

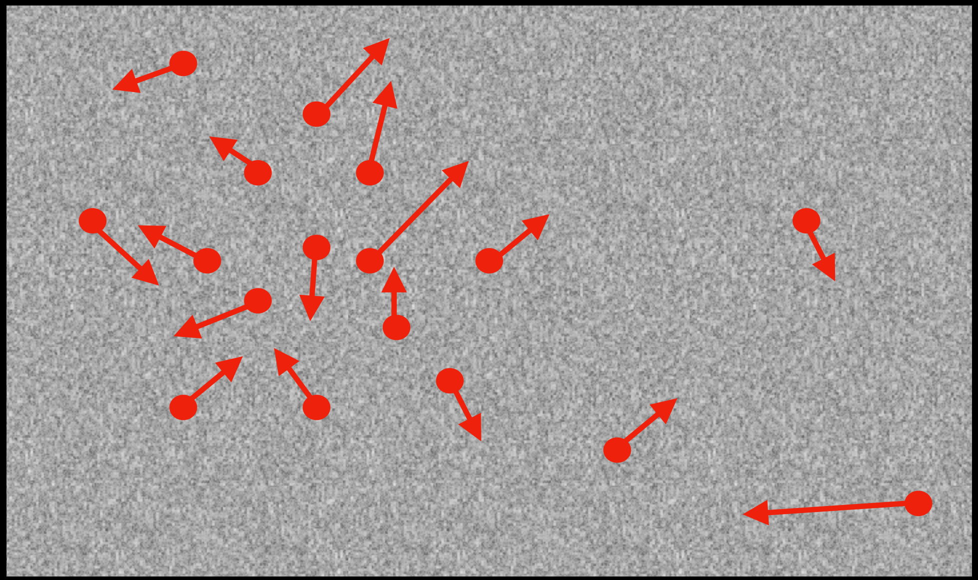
- A generalização para um corpo esfericamente simétrico qualquer é trivial: desde que a massa m esteja ***fora*** da distribuição de massa, a força gravitacional e o potencial são idênticos aos de uma massa pontual M no centro do objeto. Ou seja:

$$\overrightarrow{F}(r) = -\frac{G\, m}{r^2}\,\hat{r}\int_0^r \rho(r') \times dA = -\frac{G\, m}{r^2}\,\hat{r}\int_0^r \rho(r') \times 4\pi r'^2\, dr'$$



Teorema do Virial

- Esse é um dos resultados mais importantes da Física, com conexões com a Termodinâmica, a Mecânica Estatística, a Astrofísica, na Mecânica Quântica e até mesmo na Epidemiologia. Vamos tomar um sistema de ***muitas*** partículas interagindo entre si:



- O Teorema do Virial nos diz que, se a interação entre as partículas for descrita por uma ***força conservativa***, qualquer que seja o seu ***estado de movimento inicial***, com o tempo vai se estabelecer uma espécie de ***equilíbrio***, de tal forma que a energia cinética e a energia potencial vão guardar uma relação precisa:

$U_{Tot} + D\,K_{Tot} \;\to\; 0$, onde D é uma constante (tipicamente, $D \simeq 2$)

Teorema do Virial

Teorema do Virial

- Vamos começar definindo uma quantidade relacionada à energia, dada por:

$G = \sum_i \overrightarrow{p}_i \cdot \vec{r}_i$, onde $\overrightarrow{p}_i$ é o momento de cada partícula.

- Vamos analisar a variação dessa grandeza G com o tempo:

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i \left(\frac{d\overrightarrow{p}_i}{dt} \cdot \vec{r}_i + \overrightarrow{p}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)$$

$$= \sum_i \left(\overrightarrow{F}_i \cdot \vec{r}_i + m_i v_i^2 \right)$$

$$= \sum_i \overrightarrow{F}_i \cdot \vec{r}_i + 2\, K_{Tot}$$

Teorema do Virial

- O Teorema do Virial nos diz que essa quantidade, G, tende a uma ***constante***, ou seja, deixa de variar, $dG/dt \to 0$. Quanto isso acontece, temos que:

$$0 = \sum_i \overrightarrow{F}_i \cdot \vec{r}_i + 2\,K_{Tot}$$

- Agora, note que a força em cada partícula, $\overrightarrow{F}_i$, é dada pela soma das forças de todas as outras partículas ($j \neq i$), ou seja:

$$\overrightarrow{F}_i = \sum_{j \neq i} \overrightarrow{F}_{j \to i}$$

- Mas se as forças são conservativas, então $\overrightarrow{F}_{j\to i} = -\overrightarrow{\nabla}_i U_{ij}$, onde $\overrightarrow{\nabla}_i$ é o gradiente com relação a $\vec{r}_i$.
- Vamos supor aqui que a interação é de tal natureza que:

$U_{ij}(r_{ij}) = \alpha_{ij}\, r_{ij}^{-n}$, onde α_{ij} são constantes que dependem do par i, j , e $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$.

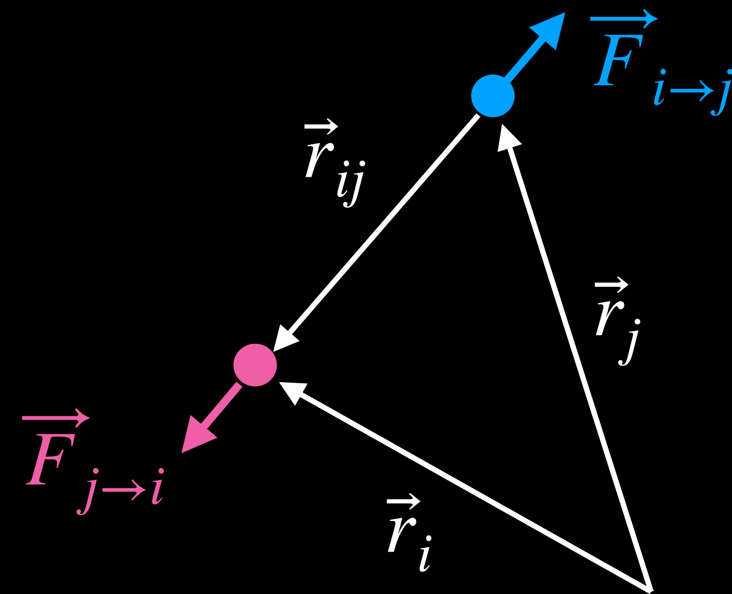
Claramente, no caso da gravidade temos $n = 1$ e $\alpha_{ij} = -G\, m_i\, m_j$.

Teorema do Virial

- Usando essa interação "hipotética", temos que:

$$\vec{F}_{j\to i} = -\,\alpha_{ij}\,\vec{\nabla}_i\left(\frac{1}{r_{ij}^n}\right)$$

$$= -\,\alpha_{ij}\left(-n\,\frac{1}{r_{ij}^{n+2}}\,\vec{r}_{ij}\right)$$



$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$$

- Portanto, temos assim que:

$$0 = \sum_i \vec{F}_i\cdot\vec{r}_i + 2\,K_{Tot}$$

$$= \sum_i\sum_{j\neq i}\left(\alpha_{ij}\,\frac{n}{r_{ij}^{n+2}}\,\vec{r}_{ij}\right)\cdot\vec{r}_i + 2\,K_{Tot}$$

$$\vec{F}_{j\to i} = -\,\vec{F}_{i\to j}$$

$$= \sum_i\sum_{j<i}\left(\alpha_{ij}\,\frac{n}{r_{ij}^{n+2}}\,\vec{r}_{ij}\right)\cdot(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + 2\,K_{Tot}$$

- Assim, obtemos finalmente que:

$$0 = \sum_i\sum_{j<i}\left(\alpha_{ij}\,\frac{n}{r_{ij}^{n}}\right) + 2\,K_{Tot} \;=\; n\,U_{Tot} + 2\,K_{Tot}$$

Teorema do Virial

- Para a força gravitacional, assim como para a força eletrostática, por exemplo, temos $n = 1$, e assim:

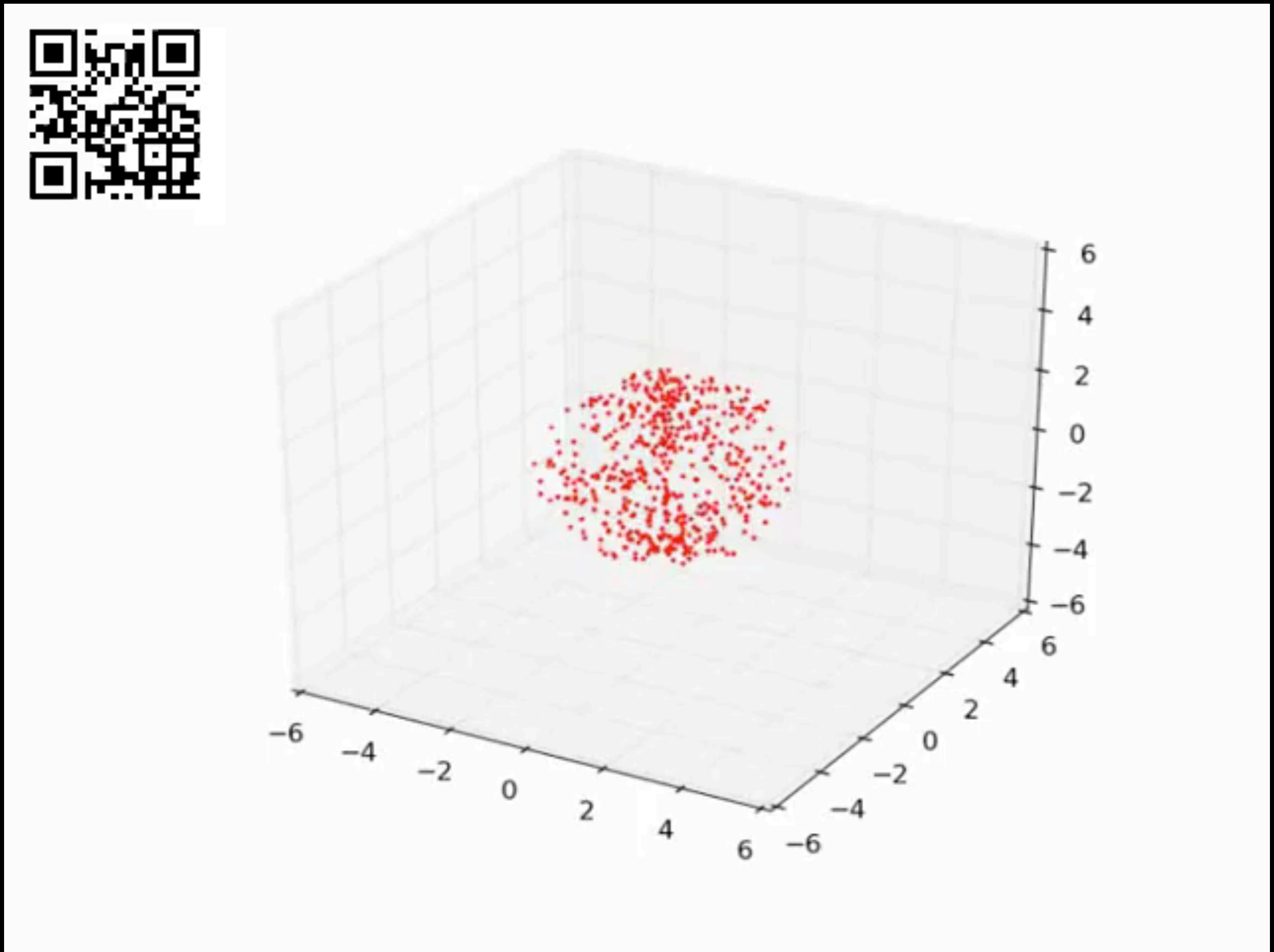
$$0 \; = \; U_{Tot} + 2\, K_{Tot}$$

- Ou seja, num sistema "virializado", temos que:

$$U_{Tot} = -\, 2\, K_{Tot}$$

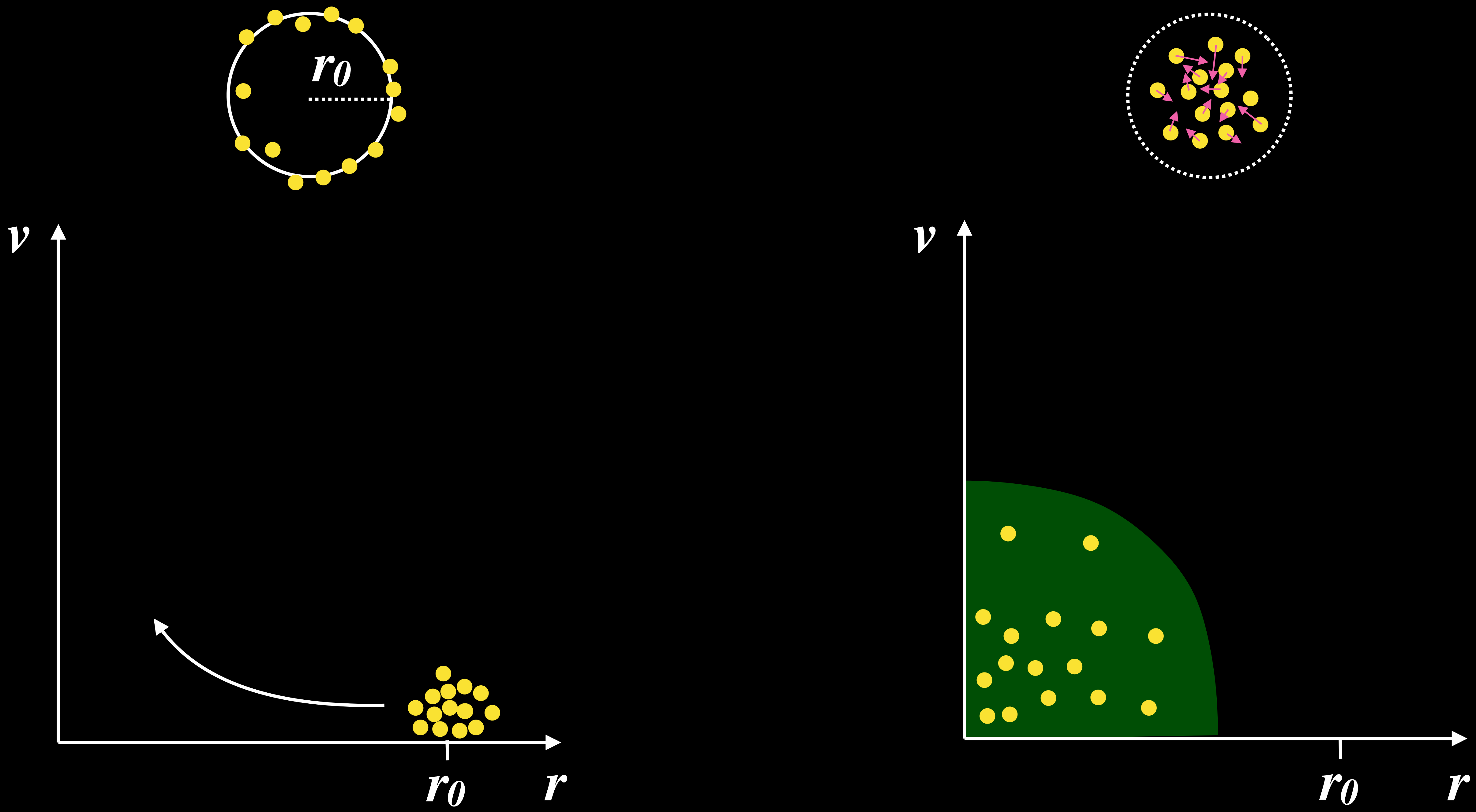
Teorema do Virial

Teorema do Virial



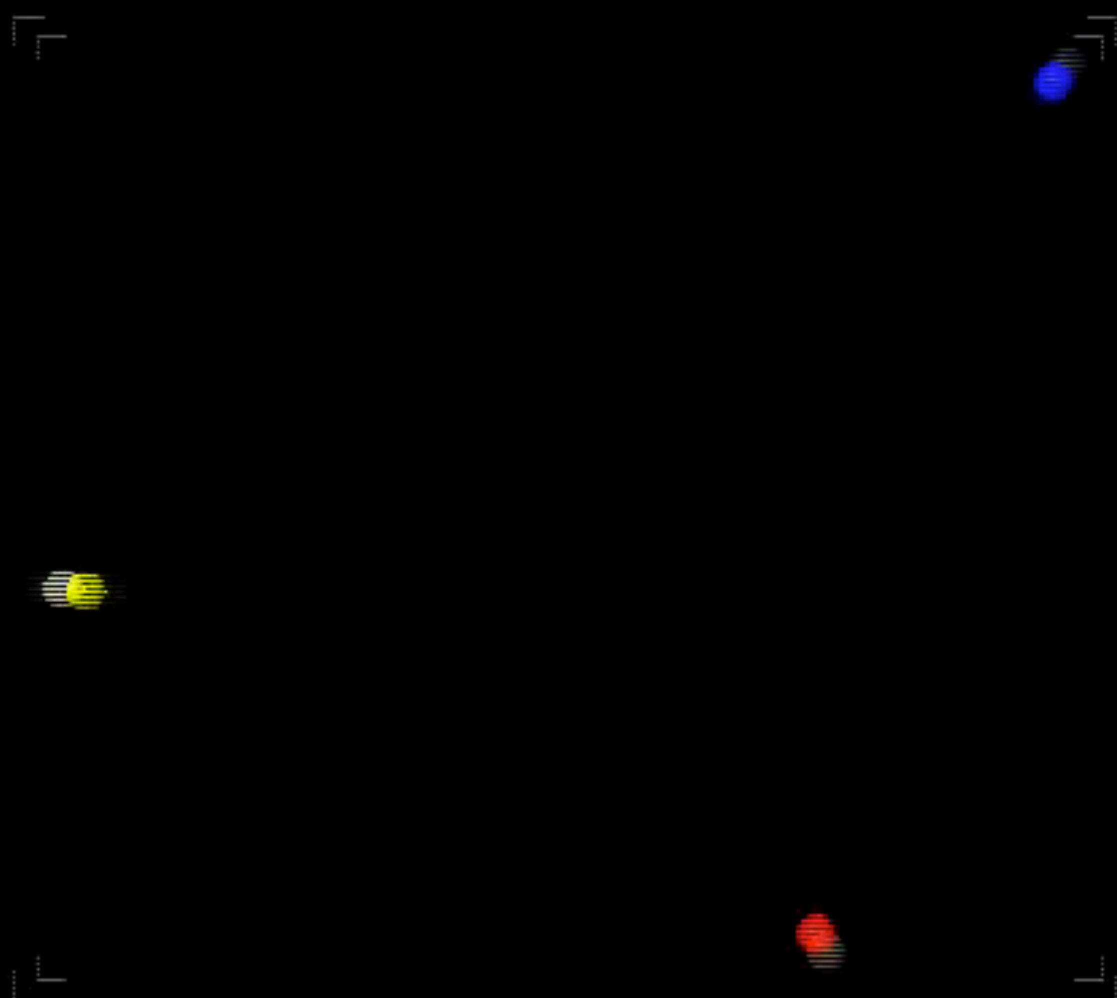
Virialização de um sistema de 500 partículas

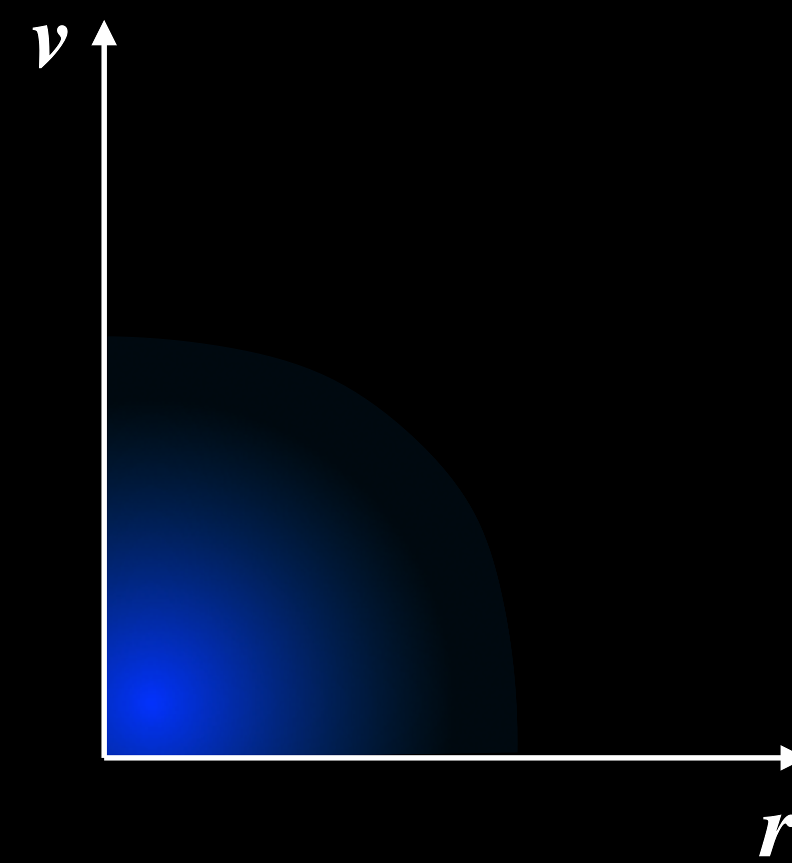
Teorema do Virial



Virialização no *espaço de fase*

Teorema do Virial





Virialização com 3 corpos??

Média no *tempo* - Teorema Ergódico