



**Disciplina:** Matemática Aplicada a Finanças.

**Professor:** Daniel Ferreira Caixe.



**ESALQ**

**USP**



# Matemática Aplicada a Finanças

**Aula:** Séries de Fluxos de Caixa.

**Professor:** Daniel Ferreira Caixe.



ESALQ

# Agenda



ESALQ

- Tipos de Série;
- Modelo-padrão;
- Séries com FCs não convencionais.



ESALQ

# Série de Fluxos de Caixa



ESALQ

- Sequência de pagamentos/recebimentos que se estima ocorrer em certo intervalo de tempo;
- Também chamadas de **anuidades**;
- ❖ **Exemplos:**
  - Empréstimos e financiamentos;
  - Contratos de aluguel;
  - Investimentos (Valuation).



ESALQ

# Tipos de Séries



ESALQ

## (a) Momento de ocorrência dos FCs:

- Postecipada: FCs ocorrem no final de cada período;
- Antecipada: FCs ocorrem no início de cada período; ou
- Diferida: FCs começam a ocorrer após o final do primeiro período (há carência).



ESALQ

# Tipos de Séries



ESALQ

## **(b) Periodicidade dos FCs:**

- Periódica: os intervalos entre os FCs são idênticos (constantes); ou
- Não periódica: os intervalos entre os FCs são diferentes.



ESALQ

# Tipos de Séries



ESALQ

## (c) Duração:

- Definida (limitada): o prazo da série (o número de FCs) é finito; ou
- Perpétua (indefinida): o prazo da série (o número de FCs) tende ao infinito.



ESALQ

# Tipos de Séries



ESALQ

## (d) Valores dos fluxos de caixa periódicos:

- Constante: os valores dos FCs são sempre iguais; ou
- Variável: os valores dos FCs podem ser diferentes.



ESALQ

# Modelo-Padrão



ESALQ

- ✓ Periódica;
- ✓ Constante (FC e taxa de desconto);
- ✓ Postecipada;
- ✓ Definida;
- **Série Uniforme Postecipada (SUP) Definida.**



ESALQ

# Modelo-Padrão



ESALQ

- Fluxo de Caixa Constante:
  - **PMT = periodic payment:**
    - ✓ Pagamento (saída de caixa/fluxo de caixa negativo); ou
    - ✓ Recebimento (entrada de caixa/fluxo de caixa positivo).

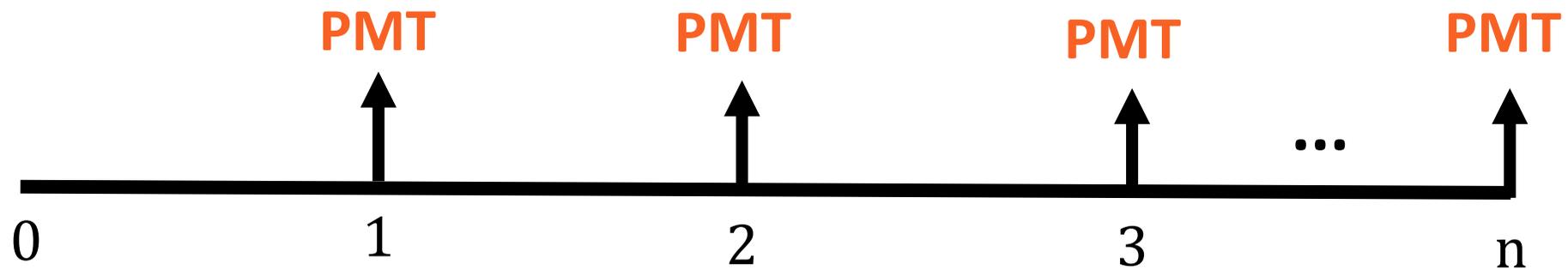


ESALQ

SUP



ESALQ



$n$  = número de períodos da série.

$m$  = número de prestações (PMT) da série.

**Na SUP:**  $n = m$ .



ESALQ

SUP

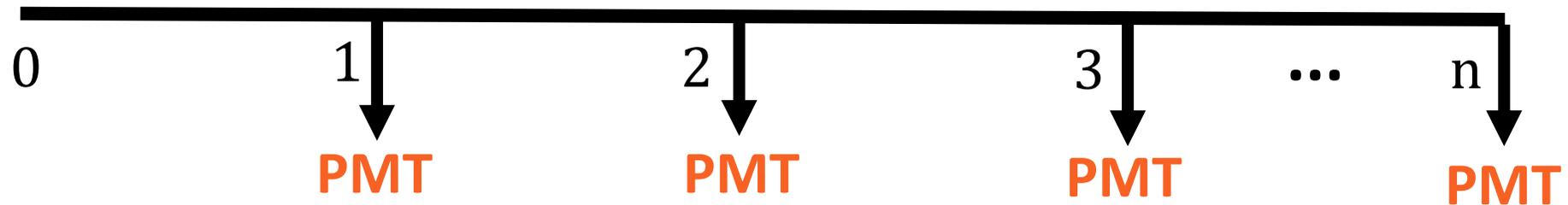


ESALQ

$n$  = número de períodos da série.

$m$  = número de prestações (PMT) da série.

**Na SUP:**  $n = m$ .



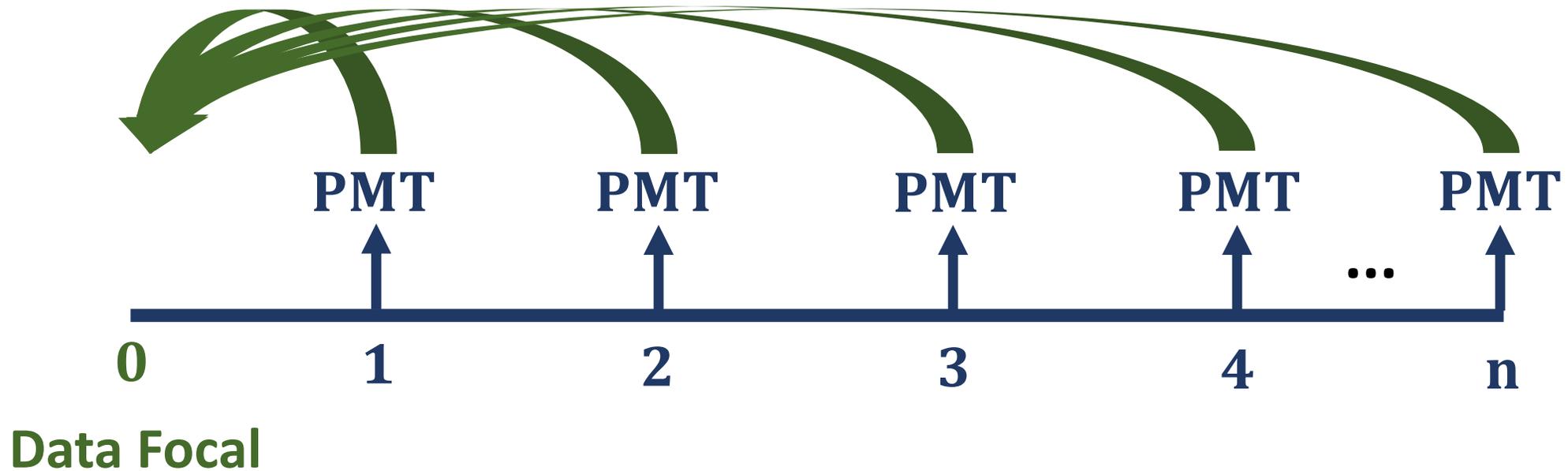


ESALQ

# Valor Presente da SUP



ESALQ





ESALQ

## Valor Presente da SUP



ESALQ

➤ Somatório dos valores presentes (na data  $t = 0$ ) dos FCs da SUP:

$$VP_0 = \sum_{t=1}^m \frac{PMT}{(1+i)^t}$$

$$VP_0 = \frac{PMT}{(1+i)^1} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \frac{PMT}{(1+i)^3} + \dots + \frac{PMT}{(1+i)^m}$$



ESALQ

# Valor Presente da SUP



ESALQ

- Colocando PMT em evidência:

$$VP_0 = PMT \times \left[ \frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \dots + \frac{1}{(1+i)^m} \right]$$

$$VP_0 = PMT \times \underbrace{[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-m}]}$$

**Fator de Valor Presente (FVP)**



ESALQ

## Valor Presente da SUP



ESALQ

$$VP_0 = PMT \times FVP(i, m)$$

### ❖ **FVP(i, m):**

➤ Soma de uma progressão geométrica (PG) de m termos:

- ✓ O primeiro termo  $(a_1) = (1 + i)^{-1}$ ;
- ✓ A razão/constante  $(q) = (1 + i)^{-1}$ ; e
- ✓ M-ésimo termo  $(a_m) = (1 + i)^{-m}$ .



ESALQ

# Fator de Valor Presente da SUP



ESALQ

- Como FVP é a soma de uma PG:

$$FVP(i, m) = \frac{a_1 - a_m \times q}{1 - q}$$

$$FVP(i, m) = \frac{(1 + i)^{-1} - (1 + i)^{-m} \times (1 + i)^{-1}}{1 - (1 + i)^{-1}}$$



# Fator de Valor Presente da SUP



- Multiplicando o numerador e o denominador por  $(1 + i)$ :

$$\text{FVP}(i, m) = \frac{[(1 + i)^{-1} - (1 + i)^{-m} \times (1 + i)^{-1}] \times (1 + i)}{[1 - (1 + i)^{-1}] \times (1 + i)}$$

$$\text{FVP}(i, m) = \frac{(1 + i)^{-1+1} - (1 + i)^{-m} \times (1 + i)^{-1+1}}{(1 + i) - (1 + i)^{-1+1}}$$

$$\text{FVP}(i, m) = \frac{1 - (1 + i)^{-m}}{1 + i - 1} = \frac{1 - (1 + i)^{-m}}{i}$$



ESALQ

# Fator de Valor Presente da SUP



ESALQ

- FVP também pode ser expresso por:

$$\text{FVP}(i, m) = \frac{1 - (1 + i)^{-m}}{i}$$

$$\text{FVP}(i, m) = \frac{(1 + i)^m - 1}{(1 + i)^m \times i}$$

$$\text{FVP}(i, m) = \frac{(1 + i)^m - 1}{(1 + i)^m \times i}$$



ESALQ

# Valor Presente da SUP



ESALQ

❖ Expressão simplificada:

$$VP_0 = PMT \times FVP(i, m)$$

$$VP_0 = PMT \times \frac{1 - (1 + i)^{-m}}{i}$$

$$VP_0 = PMT \times \frac{(1 + i)^m - 1}{(1 + i)^m \times i}$$



ESALQ

## Exemplo I



ESALQ

Determinado bem é vendido em 7 pagamentos mensais, iguais e consecutivos de R\$ 4.000,00. Para uma taxa de juros de 2,6% a.m., até que preço compensa adquirir o aparelho à vista?



ESALQ

## Exemplo I



ESALQ

$$VP_0 = PMT \times \frac{1 - (1 + i)^{-m}}{i}$$

$$VP_0 = 4.000 \times \frac{1 - (1 + 0,026)^{-7}}{0,026} \cong \text{R\$ } 25.301,17$$

- Pagar 7 parcelas de R\$ 4.000 no final dos próximos 7 meses é economicamente igual a pagar R\$ 25.301,17 hoje:
- ✓ Compensaria pagar à vista para valores inferiores a R\$ 25.301,17.



ESALQ

HP 12C



ESALQ

▪ **Sugestões gratuitas:**

✓ **Aplicativo:**

➤ Touch RPN.

✓ **Emulador:**

➤ Web Palladium Calculator ([https://stendec.io/ctb/rpn\\_finp.html](https://stendec.io/ctb/rpn_finp.html)).



ESALQ

## Exemplo I



ESALQ

Comando	Significado
<b>f REG</b>	Limpa os registradores/memoria
7 n	Registra o número de prestações
2.6 i	Registra a taxa
4000 CHS PMT	Registra o pagamento periódico
PV	Calcula o Valor Presente

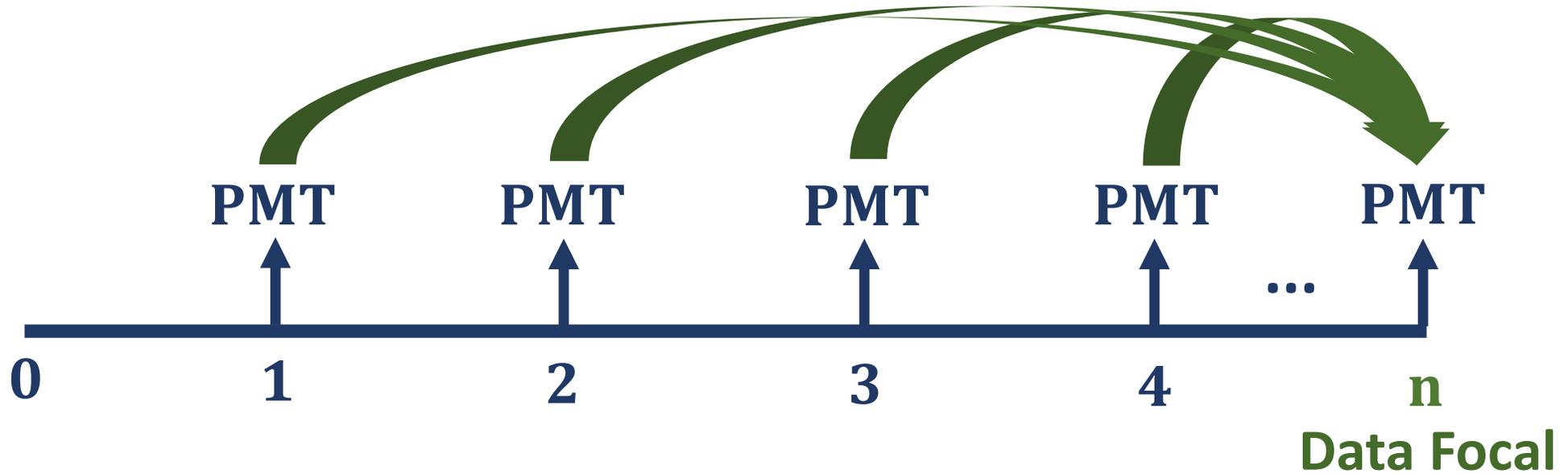


ESALQ

# Valor Futuro da SUP



ESALQ





ESALQ

## Valor Futuro da SUP



ESALQ

➤ Somatório dos valores futuros (na data  $t = m$ ) dos FCs da SUP:

$$VF_n = \sum_{t=1}^m PMT \times (1 + i)^{m-t}$$

$$VF_n = PMT \times (1 + i)^{m-1} + PMT \times (1 + i)^{m-2} + \dots + PMT \times (1 + i)^{m-m}$$



ESALQ

# Fator de Valor Futuro da SUP



ESALQ

- Colocando PMT em evidência:

$$VF_n = PMT \times \underbrace{[(1 + i)^{m-1} + (1 + i)^{m-2} + (1 + i)^{m-3} + \dots + (1 + i)^{m-m}]}$$

Fator de Valor Futuro (FVF)



ESALQ

## Valor Futuro da SUP



ESALQ

- Como FVF é a soma de uma PG, similarmente à FVP, temos que:

$$\text{FVF}(i, m) = \frac{(1 + i)^m - 1}{i}$$



ESALQ

# Valor Futuro da SUP



ESALQ

❖ Expressão simplificada:

$$VF_n = PMT \times FVF(i, m)$$

$$VF_n = PMT \times \frac{(1 + i)^m - 1}{i}$$



ESALQ

## Exemplo II



ESALQ

Uma pessoa irá necessitar de R\$ 22.000,00 daqui a 1 ano para realizar uma viagem. Para tanto, fará uma economia mensal de R\$ 1.250,00 nos próximos 12 meses, a qual será aplicada em um investimento que oferece remuneração efetiva 4,0% ao mês. A pessoa terá acumulado o montante necessário ao final de um ano para fazer a sua viagem? Se o montante necessário não for suficiente, a economia mensal deveria ser de qual o valor?

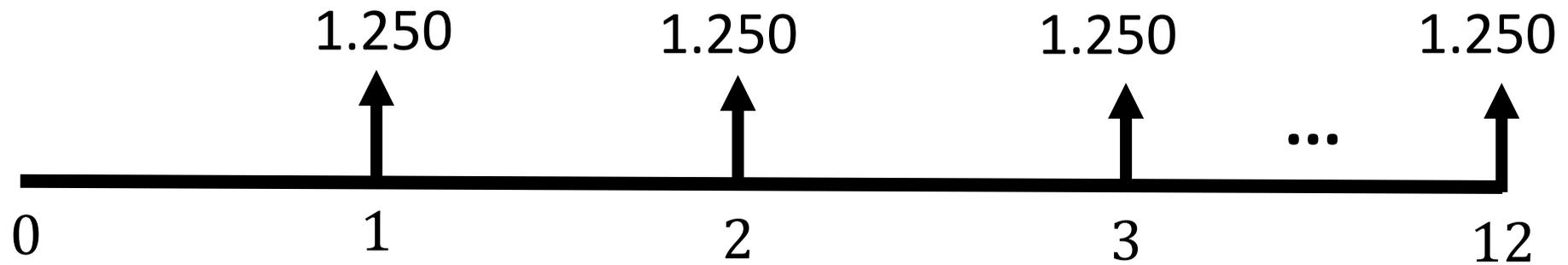


ESALQ

## Exemplo II



ESALQ





ESALQ

## Exemplo II



ESALQ

$$VF_n = PMT \times \frac{(1 + i)^m - 1}{i}$$

$$VF_n = 1.250 \times \frac{(1 + 0,04)^{12} - 1}{0,04} \cong \text{R\$ } 18.782,26$$

➤ O montante não é o suficiente para cobrir o valor total da viagem.



ESALQ

## Exemplo II



ESALQ

Comando	Significado
<b>f REG</b>	Limpa os registradores/memoria
12 n	Registra o número de prestações
4 i	Registra a taxa
1250 CHS PMT	Registra o pagamento periódico
FV	Calcula o Valor Futuro



ESALQ

## Exemplo II



ESALQ

❖ Qual deveria ser o valor da economia mensal?

$$VF_n = PMT \times \frac{(1 + i)^m - 1}{i}$$

$$22.000 = PMT \times \frac{(1 + 0,04)^{12} - 1}{0,04}$$

$$PMT \cong \text{R\$ } 1.464,15$$



ESALQ

## Exemplo II



ESALQ

Comando	Significado
<b>f REG</b>	Limpa os registradores/memoria
12 n	Registra o número de prestações
4 i	Registra a taxa
22000 FV	Registra o valor futuro
PMT CHS	Calcula o pagamento periódico



ESALQ

# Séries Não Convencionais



ESALQ

➤ Sequências de pagamento, que diferem do modelo-padrão:

**(a) Momento de ocorrência dos FCs;**

**(b) Periodicidade dos FCs;**

**(c) Duração;** ou

**(d) Valores dos fluxos de caixa periódicos.**



ESALQ

# Momento de Ocorrência



ESALQ

## (a.2) Série Antecipada:

- Os FCs ocorrem no início de cada período (antes do final do primeiro período);

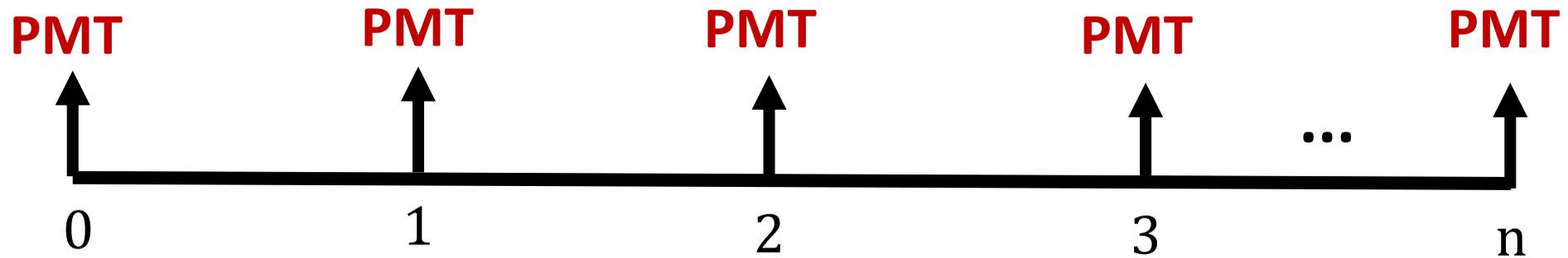


ESALQ

# Série Antecipada



ESALQ





ESALQ

# Série Antecipada



ESALQ

## ❖ Como calcular o valor presente de uma série antecipada?

- Calcula-se o valor presente da SUP com  $m - 1$  prestações; e
- Soma-se o valor presente do primeiro PMT.

$$VP_0 = PMT \times \frac{1 - (1 + i)^{-(m-1)}}{i} + PMT$$

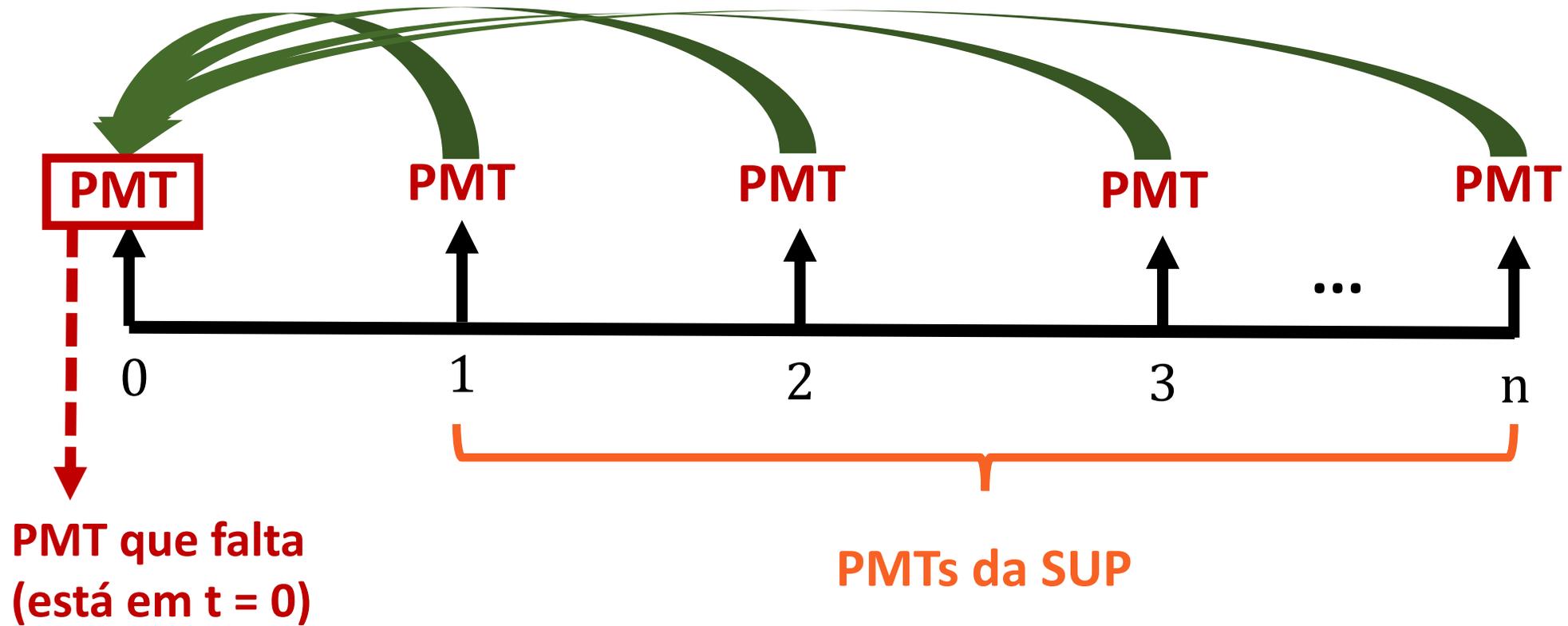


ESALQ



ESALQ

# Série Antecipada





ESALQ

# Momento de Ocorrência



ESALQ

## (a.3) Série Diferida:

- Os FCs começam a ocorrer após o final do primeiro período;
- **Base de comparação:** final do primeiro período;
- ✓ **Carência (c):** número de períodos, após o final do primeiro, que demora para ocorrer o primeiro FC.

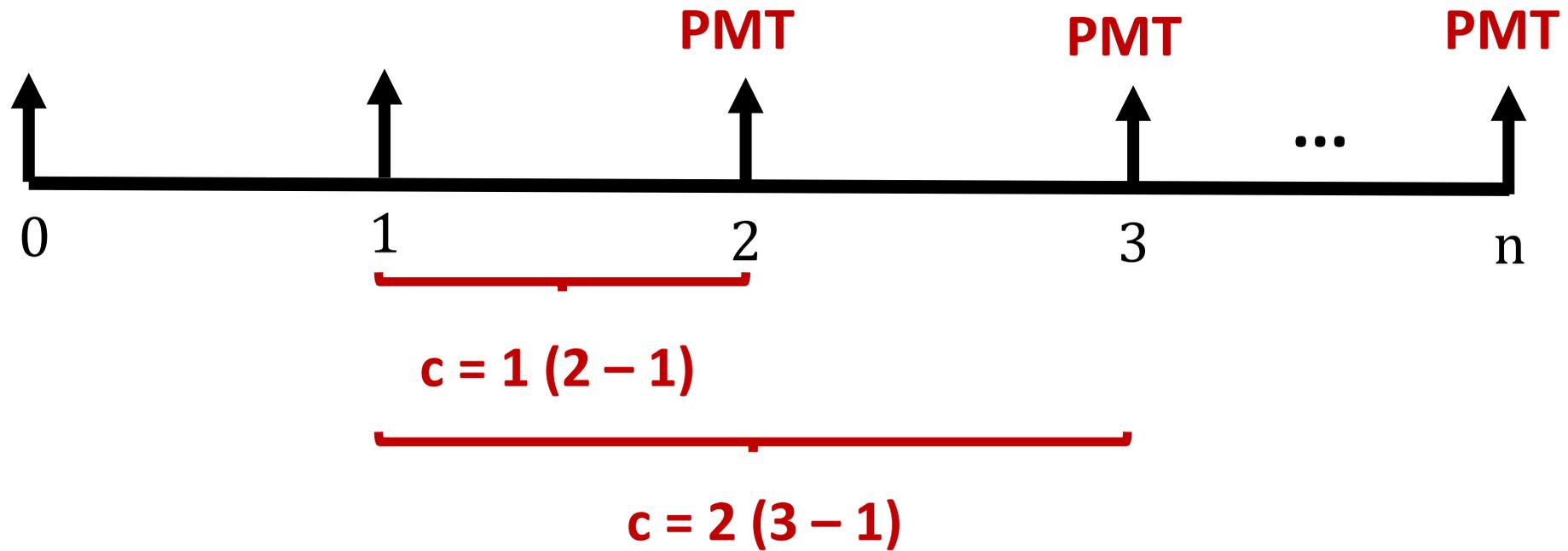


ESALQ

# Série Diferida



ESALQ





ESALQ

# Série Diferida



ESALQ

## ❖ Como calcular o valor presente de uma série diferida?

- Calcula-se o valor presente (na data  $t = c$ ) de uma SUP com  $m$  prestações; e
- Traz-se o VP da SUP para a data  $t = 0$  pelo fator de atualização de juros compostos (FAC) no qual  $n = c$ .



ESALQ

# Série Diferida



ESALQ

❖ Como calcular o valor presente de uma série diferida?

$$VP_0 = PMT \times FVP(i, m) \times FAC(i, c)$$

$$VP_0 = PMT \times \frac{1 - (1 + i)^{-m}}{i} \times (1 + i)^{-c}$$

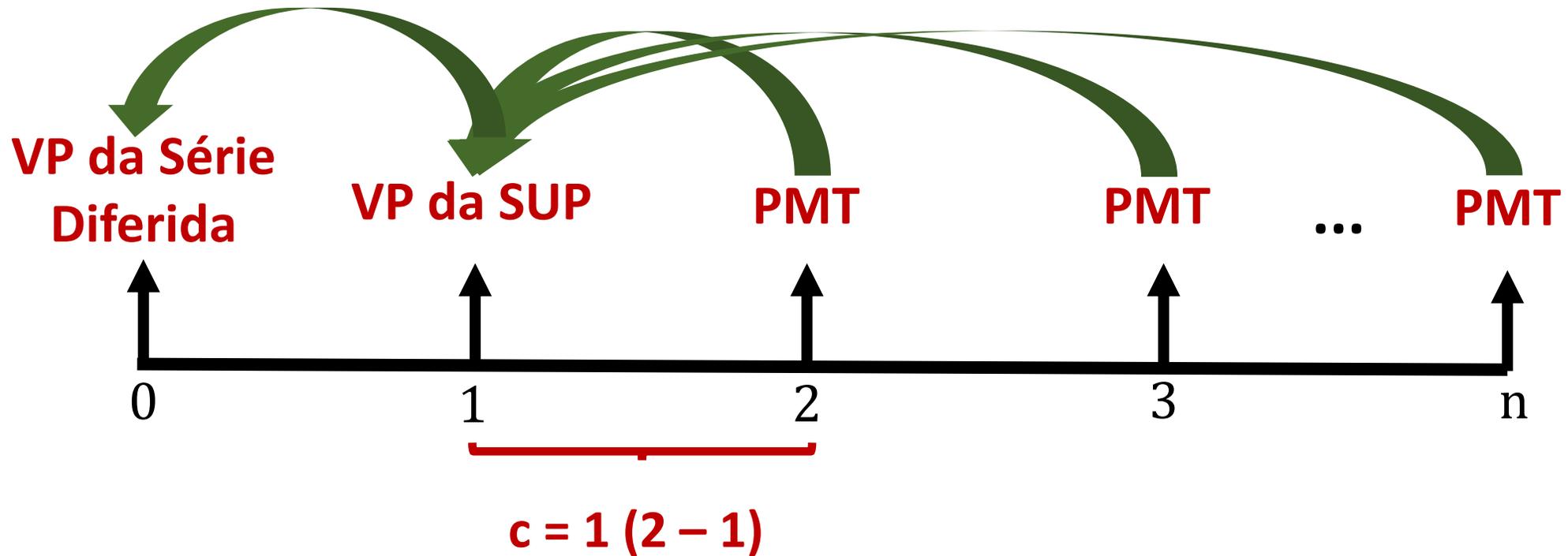


ESALQ

# Série Diferida



ESALQ





ESALQ

## Exemplo III



ESALQ

Uma mercadoria é vendida a prazo em 5 pagamentos mensais de R\$ 700,00. Sendo de 3,5% a.m. a taxa de juros, determine o seu preço à vista admitindo que:

- (a) O primeiro pagamento é efetuado no ato da compra.
- (b) O primeiro pagamento é efetuado ao final do segundo mês.



ESALQ

## Exemplo III



ESALQ

(a) O primeiro pagamento é efetuado no ato da compra.

$$VP_0 = PMT \times \frac{1 - (1 + i)^{-(m-1)}}{i} + PMT$$

$$VP_0 = 700 \times \frac{1 - (1 + 0,035)^{-(5-1)}}{0,035} + 700 \cong \text{R\$ } 3.271,16$$



ESALQ

## Exemplo II



ESALQ

Comando	Significado
<b>f REG</b>	Limpa os registradores/memoria
5 n	Registra o número de prestações
3.5 i	Registra a taxa
700 CHS PMT	Registra o pagamento periódico
<b>g BEG</b>	Registra que é uma série antecipada
PV	Calcula o valor presente da série



ESALQ

## Exemplo III



ESALQ

**(b)** O primeiro pagamento é efetuado ao final do segundo mês.

$$VP_0 = PMT \times \frac{1 - (1 + i)^{-m}}{i} \times (1 + i)^{-c}$$

$$VP_0 = 700 \times \frac{1 - (1 + 0,035)^{-5}}{0,035} \times (1 + 0,035)^{-1}$$

$$VP_0 \cong \text{R\$ } 3.053,66$$



ESALQ

## Exemplo III



ESALQ

Comando	Significado
<b>f REG</b>	Limpa os registradores/memoria
5 n	Registra o número de prestações
3.5 i	Registra a taxa
700 CHS PMT	Registra o pagamento periódico
PV	Calcula o valor presente da série
1.035 ÷	Multiplica o valor presente por FAC



ESALQ

## Duração



ESALQ

- A duração pode ser indeterminada/indefinida/infinita:
  - **Série perpétua de fluxos de caixa;**
  - ✓ **Exemplos:** avaliação de projetos públicos, de empresas e de imóveis.
  - ❖ **É impossível calcular o VP de uma série perpétua?**
- **Não!**

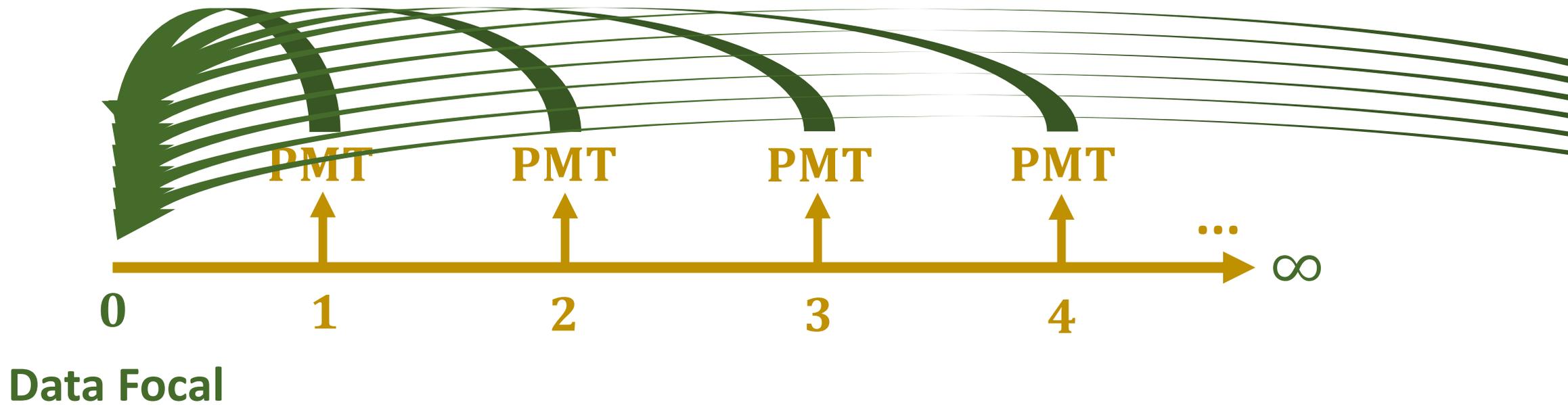


ESALQ

# VP da SUP Perpétua



ESALQ





ESALQ

## VP da SUP Perpétua



ESALQ

➤ Somatório dos valores presentes (na data  $t = 0$ ) dos FCs da SUP:

$$VP_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{PMT}{(1+i)^t}$$

$$VP_0 = PMT \times FVP(i, \infty)$$



ESALQ

# Fator de VP da SUP Perpétua



ESALQ

$$\mathbf{FVP(i, \infty) = \lim_{m \rightarrow \infty} FVP(i, m)}$$

$$\mathbf{FVP(i, \infty) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 - (1 + i)^{-m}}{i}}$$

$$\mathbf{FVP(i, \infty) = \frac{1}{i}}$$



ESALQ

## VP da SUP Perpétua



ESALQ

$$VP_0 = PMT \times FVP(i, \infty)$$

$$VP_0 = PMT \times \frac{1}{i}$$

$$VP_0 = \frac{PMT}{i}$$



ESALQ

## VP da Série Perpétua



ESALQ

- E se os fluxos de caixa crescerem a uma taxa constante  $g$ ?

$$VP_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{FC_t}{(1+i)^t} = \frac{FC_1}{i-g} = \frac{FC_0 \times (1+g)}{i-g}$$

### ❖ Restrição:

✓  $i > g$ . Caso contrário,  $VP_0$  terá sinal invertido ou tenderá ao infinito.



ESALQ

## Exemplo IV



ESALQ

Admita que um apartamento renderá R\$ 2.000,00 de aluguel mensalmente por prazo indeterminado. Por simplicidade, assumamos que não existam gastos com a manutenção do imóvel. Sendo de 2% a.m. o custo de oportunidade de mercado, calcule o valor deste apartamento, assumindo que:

- (a) O valor do aluguel irá manter-se constante ao longo do tempo.
- (b) O valor do aluguel crescerá a uma taxa de 0,5% a.m. ao longo do tempo.



ESALQ

## Exemplo IV



ESALQ

(a) O valor do aluguel irá manter-se constante ao longo do tempo.

$$VP_0 = \frac{PMT}{i} = \frac{2.000}{0,02} = \text{R\$ } 100.000$$



ESALQ

## Exemplo IV



ESALQ

**(b)** O valor do aluguel crescerá a uma taxa de 0,5% a.m. ao longo do tempo.

$$VP_0 = \frac{FC_0 \times (1 + g)}{i - g} = \frac{2.000 \times (1 + 0,005)}{0,02 - 0,005} = \text{R\$ } 134.000$$



ESALQ

## Referências



ESALQ

ASSAF NETO, A. **Matemática financeira: edição universitária.** 2. ed. Barueri: Atlas, 2022.

TOSI, A. J. **Matemática financeira com ênfase em produtos bancários.** 4 ed. São Paulo: Atlas, 2015.

VIEIRA SOBRINHO, J. D. **Matemática Financeira.** 8. ed. São Paulo: Atlas, 2023.