



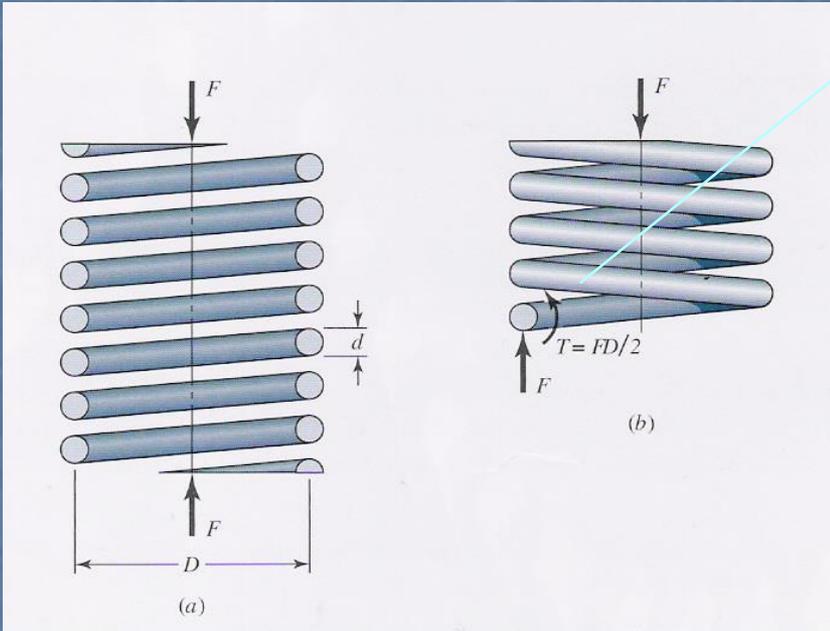
AULA 8 – Molas Mecânicas



Prof. Dr. Jaime Duduch



1. Tensões em Molas Helicoidais de Compressão



$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{Tr}{J} + \frac{F}{A}$$

$\frac{FD/2}{J}$ $\frac{d/2}{J}$
 $\frac{F}{\pi \frac{d^2}{4}}$

Índice de mola

$$C = \frac{D}{d}$$

Fator de Bergsträsser

$$K_B = \frac{4C + 2}{4C - 3}$$

Efeito da cortante e da curvatura

$$\tau = K_B \frac{8FD}{\pi d^3}$$

Não há fator de concentração de tensão

2. Deformações em Molas Helicoidais de Compressão

$$U = \frac{T^2 l}{2GJ} + \frac{F^2 l}{2AG}$$

Teoria da Energia de Deformação

$$l = \pi DN \quad N = \text{número de espiras}$$

$$U = \frac{4F^2 D^3 N}{d^4 G} + \frac{2F^2 DN}{d^2 G}$$

$$y = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{8FD^3 N}{d^4 G} + \frac{4FDN}{d^2 G}$$

Teorema de Castigliano

substituindo $C = \frac{D}{d}$ e rearranjando

$$\Rightarrow y = \frac{8FD^3 N}{d^4 G} \left(1 + \frac{1}{2C^2} \right) \approx \frac{8FD^3 N}{d^4 G}$$

Erro menor que 3%

$$k = \frac{F}{y}$$

Ver item 10.3 do Shigley

$$k \cong \frac{d^4 G}{8D^3 N}$$

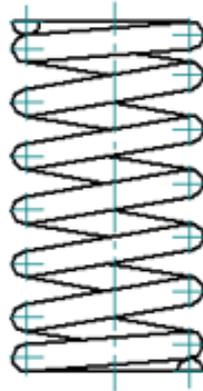
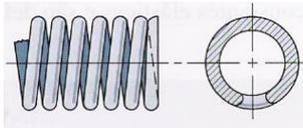
$G = \text{módulo de elasticidade torcional}$

3. Número de Espiras Ativas

Número de Espiras Ativas

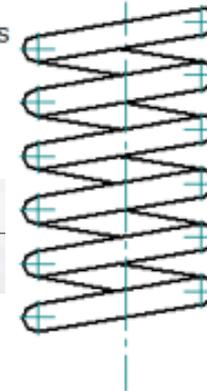
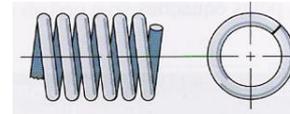
Extremidades esquadrejaas e esmerilhadas

$$n_t = n_a + 2$$



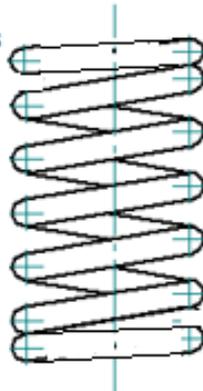
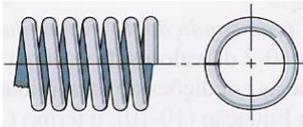
Extremidade simples

$$n_t = n_a$$



Extremidades esquadrejadas

$$n_t = n_a + 2$$



Extremidades simples e esmerilhadas

$$n_t = n_a + 1$$

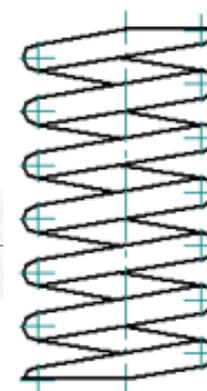
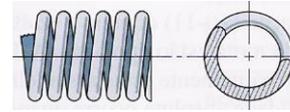


Tabela 10.1 - Shigley

Termo	Tipo de extremidades de mola			
	Simples	Simples e esmerilhada	Esquadrada ou fechada	Esquadrada e esmerilhada
Espirais de extremidade, N_e	0	1	2	2
Total de espirais, N_t	N_a	$N_a + 1$	$N_a + 2$	$N_a + 2$
Comprimento livre, L_0	$pN_a + d$	$p(N_a + 1)$	$pN_a + 3d$	$pN_a + 2d$
Comprimento sólido, L_s	$d(N_t + 1)$	dN_t	$d(N_t + 1)$	dN_t
Passo, p	$(L_0 - d)/N_a$	$L_0/(N_a + 1)$	$(L_0 - 3d)/N_a$	$(L_0 - 2d)/N_a$

COMPRIMENTO SÓLIDO PARA MOLAS ESQUADREJADAS E ESMERILHADAS (MÉDIA)

$$L_s = (N_t - \alpha)d \quad \alpha = 0,75 \quad (\text{VALOR MÉDIO})$$

4. Estabilidade lateral (equivalente à flambagem)

$$L_0 < \frac{\pi D}{\alpha} \left[\frac{2(E - G)}{2G + E} \right]^{1/2}$$

para aços: $L_0 < 2,63 \frac{D}{\alpha}$

Para extremidades esquadrejadas, esmerilhadas e guiadas:

$$\alpha = 0,5 \quad e \quad L_0 \leq 5,26D$$

Tabela 10.2 do Shigley

Condição de extremidade	Constante α
Mola suportada entre superfícies planas paralelas (extremidades fixas)	0,5
Uma extremidade apoiada por superfície plana perpendicular ao eixo de mola (fixo); outra extremidade pivotada (articulada)	0,707
Ambas as extremidades pivotadas (articuladas)	1
Uma extremidade engastada; outra extremidade livre	2

*Extremidades apoiadas por superfícies planas devem ser esquadradas e esmerilhadas.

4. Estabilidade lateral (equivalente à flambagem)

$$L_0 < \frac{\pi D}{\alpha} \left[\frac{2(E - G)}{2G + E} \right]^{1/2}$$

para aços: $L_0 < 2,63 \frac{D}{\alpha}$

Para extremidades esquadrejadas, esmerilhadas e guiadas:

$$\alpha = 0,5 \quad e \quad L_0 \leq 5,26D$$

Tabela 10.2 do Shigley

Condição de extremidade	Constante α
Mola suportada entre superfícies planas paralelas (extremidades fixas)	0,5
Uma extremidade apoiada por superfície plana perpendicular ao eixo de mola (fixo); outra extremidade pivotada (articulada)	0,707
Ambas as extremidades pivotadas (articuladas)	1
Uma extremidade engastada; outra extremidade livre	2

*Extremidades apoiadas por superfícies planas devem ser esquadradas e esmerilhadas.

5. Materiais da Mola

$$S_{ut} = \frac{A}{d^m}$$

$$0,35S_{ut} \leq S_{sy} \leq 0,52S_{ut}$$

Valores gerais para aços.
Para valores específicos, ver tabela a seguir

Tabela 10.6 Shigley

Material	Porcentagem máxima de resistência de tração	
	Antes da remoção de assentamento (inclui K_B)	Após a remoção de assentamento (inclui K_S)
Fio musical e aço carbono estirado a frio	45	60-70
Aço carbono endurecido e revenido e aço de baixa liga	50	65-75
Aços austeníticos inoxidáveis	35	55-65
Ligas não ferrosas	35	55-65

$$K_S = \frac{2C + 1}{2C}$$

Fator que compensa o cisalhamento direto

Tabela 10.3
(Shigley) Aços
mola de liga e
aços de alto
carbono

Nome do material	Especificação similar	Descrição
Fio musical (ou polido), 0,80–0,95C	UNS G10850 AISI 1085 ASTM A228-51	Este é o melhor, mais tenaz e mais amplamente usado de todos os materiais de mola para pequenas molas. Ele tem a mais elevada resistência de tração e pode aguentar tensões mais elevadas sob carregamento repetido que qualquer outro material de mola. Disponível em diâmetros de 0,12 mm a 3 mm. Não use acima de 120°C ou em temperaturas abaixo de zero.
Fio revenido em óleo, 0,60–0,70C	UNS G10650 AISI 1065 ASTM 229-41	Este aço de mola de propósito geral é usado para muitos tipos de molas de espirais, em que o custo do fio musical é proibitivo e em tamanhos maiores que os disponíveis em fio musical. Não recomendável para carregamento de choque ou impacto. Disponível em diâmetros de 3 mm a 12 mm, mas diâmetros maiores e menores podem ser obtidos. Não recomendado para uso acima de 180°C ou em temperaturas abaixo de zero.
Mola de fio duro estirado 0,60–0,70C	UNS G10660 AISI 1066 ASTM A227-47	Este é o aço de mola mais barato de propósito geral, e deve ser usado somente quando a vida, acurácia e deflexão não são tão importantes. Disponível em diâmetros de 0,8 mm a 12 mm. Não recomendado para uso acima de 120°C ou em temperaturas abaixo de zero.
Cromo-vanádio	UNS G61500 AISI 6150 ASTM 231-41	Este é o mais popular aço-liga de mola para condições envolvendo tensões mais elevadas que pode ser usado com aços de alto-carbono, e para uso em que resistência à fadiga e longa durançã são necessárias. Também bom para cargas de choque e impacto. Amplamente usado para mola de válvulas de motor de aeronaves e em temperaturas até 220°C. Disponível recozido ou pré-revenido, em tamanhos de 0,8 mm a 12 mm de diâmetro.
Cromosilício	UNS G92540 AISI 9254	Esta liga é um material excelente para molas altamente tensionadas que requerem viga longa e estão sujeitas a carregamento de choque. Durezas Rockwell de C50 a C53 são muito comuns, e o material pode ser usado até 250°C. Disponível de 0,8 mm a 12 mm de diâmetro.

Constantes A e m de $S_{ut}=A/d^m$

Tabela 10.4
(Shigley)

Material	ASTM n°	Expoente m	Diâmetro, mm	A, MPa · mm ^m	Custo relativo do fio
Fio musical*	A228	0,145	0,10–6,5	2211	2,6
Fio temperado e revenido em óleo†	A229	0,187	0,5–12,7	1855	1,3
Mola de fio duro estirado‡	A227	0,190	0,7–12,7	1783	1,0
Fio de cromo-vanádio§	A232	0,168	0,8–11,1	2005	3,1
Fio cromo-silício	A401	0,108	1,6–9,5	1974	4,0
Fio inoxidável#	A313	0,146	0,3–2,5	1867	7,6–11
		0,263	2,5–5	2065	
		0,478	5–10	2911	
Fio fósforo-bronze**	B159	0	0,1–0,6	1000	8,0
		0,028	0,6–2	913	
		0,064	2–7,5	932	

*Superfície é lisa, livre de defeitos e tem um acabamento brilhante e lustroso.

†Tem uma crosta de termo-tratamento branda, que pode ser removida antes de revestimento.

‡Superfície é lisa e brilhante, sem marcas visíveis.

§Fio revenido de qualidade aeronáutica, pode também ser obtido recozido.

|| Revenido à dureza Rockwell C49, mas pode ser obtido sem revenido.

Aço Inoxidável tipo 302.

** Revenido CA510.

Propriedades mecânicas de alguns fios de mola

Tabela 10.5
(Shigley)

Material	Limite elástico, porcentagem de S_{ut}		Diâmetro d , mm	E GPa	G GPa
	torção	tração			
Fio musical A228	65-75	45-60	<0,8	203,4	82,7
			0,8-1,6	200	81,7
			1,61-3	196,5	81,0
			>3	193	80,0
Mola de fio duro estirado A227	60-70	45-55	<8	198,6	80,7
			0,8-1,6	197,9	80,0
			1,61-3	197,2	79,3
			>3	196,5	78,6
Revenido em óleo A239	85-90	45-50		196,5	77,2
Mola de válvula A230	85-90	50-60		203,4	77,2
Cromo-vanádio A231	88-93	65-75		203,4	77,2
A232	88-93			203,4	77,2
Cromo-silício A401	85-93	65-75		203,4	77,2
Aço inoxidável					
A313*	65-75	45-55		193	69,0
17-7PH	75-80	55-60		208,4	75,8
414	65-70	42-55		200	77,2
420	65-75	45-55		200	77,2
431	72-76	50-55		206	79,3
Fósforo-bronze B159	75-80	45-50		103,4	41,4
Berílio-cobre B197	70	50		117,2	44,8
	75	50-55		131	50,3
Liga inconel X-750	65-70	40-45		213,7	77,2

Parte da tabela A 26
do Shigley

Nome da bitola:	Fio de música
7/0	0,012
16/0	0,127
5/0	0,152
4/0	0,178
3/0	0,203
2/0	0,229
0	0,254
1	0,279
2	0,305
3	0,33
4	0,356
5	0,406
6	0,457
7	0,508
8	0,559
9	0,61
10	0,66
11	0,737
12	0,787
13	0,838
14	0,889
15	0,94
16	0,991
17	

6. Dimensionamento

$$4 \leq C \leq 12$$

$$3 < N_a < 15$$

$$F_s = (1 + \xi)F_{m\acute{a}x}$$

$$\xi \cong 0,15$$

$$n_s = 1,2$$

Para projetos destinados a grandes lotes:

$$fom = -(\text{custo relativo do material}) \frac{\gamma \pi^2 d^2 N_t D}{4}$$

Onde:

C = índice de mola

N_a = número de espiras ativas

ξ = percurso fracionário até o fechamento

F_s = força até o fechamento

$F_{m\acute{a}x}$ = força máxima admissível antes do escoamento

n_s = fator de segurança no fechamento

γ = peso específico do material da mola

DESENHO ESTÁTICO DE MOLA

Escolha d

Sobre uma haste

Livre

Em um orifício

Como assentada
ou enrolada

Como enrolada

Assentamento removido

Como assentada
ou enrolada

$$D = d_{\text{haste}} + d + \text{folga}$$

$$S_{sy} = \text{const}(A) / d^{m^\dagger}$$

$$S_{sy} = 0,65A / d^m$$

$$D = d_{\text{orifício}} - d - \text{folga}$$

$$C = \frac{2\alpha - \beta}{4\beta} + \sqrt{\left(\frac{2\alpha - \beta}{4\beta}\right)^2 - \frac{3\alpha}{4\beta}} \quad D = \frac{S_{sy}\pi d^3}{8n_s(1 + \xi)F_{\max}}$$

$$\alpha = \frac{S_{sy}}{n_s} \quad \beta = \frac{8(1 + \xi)F_{\max}}{\pi d^2}$$

$$D = Cd$$

$$C = D / d$$

$$K_B = (4C + 2) / (4C - 3)$$

$$\tau_s = K_B 8(1 + \xi)F_{\max} D / (\pi d^3)$$

$$n_s = S_{sy} / \tau_s$$

$$OD = D + d$$

$$ID = D - d$$

$$N_a = Gd^4 y_{\max} / (8D^3 F_{\max})$$

$$N_r: \text{Tabela 10-1}$$

$$L_s: \text{Tabela 10-1}$$

$$L_O: \text{Tabela 10-1}$$

$$(L_O)_{cr} = 2,63D / \alpha$$

$$\text{fom} = -(\text{custo rel.}) \gamma \pi^2 d^2 N_r D / 4$$

Imprima ou mostre: $d, D, C, OD, ID, N_a, N_r, L_s, L_O, (L_O)_{cr}, n_s$, fom.

Construa uma tabela, conduza a avaliação de desenho por inspeção.

Elimine desenhos inexecutáveis mostrando restrições ativas.

Escolha entre os desenhos satisfatórios usando a figura de mérito.

[†] A constante é encontrada por meio da Tabela 10-6.

Fadiga

Zimmerli → Tamanho material ⇒ não afeta S_e
 S_{ut} (p/ vida infinita)
p/ aços mola $d < 10 \text{ mm}$

além disso S_e → igual (constante) p/ S_{ut} altas

$$S_{sa} = 241 \text{ MPa} \quad S_{sm} = 378 \text{ MPa} \quad (\text{s/ jateamentos})$$

$$S_{sa} = 398 \text{ MPa} \quad S_{sm} = 537 \text{ MPa} \quad (\text{gateamento de granalha})$$

Critério de Sines:

$$\text{p.ex. } \sigma_a = 211,3 \text{ MPa}$$

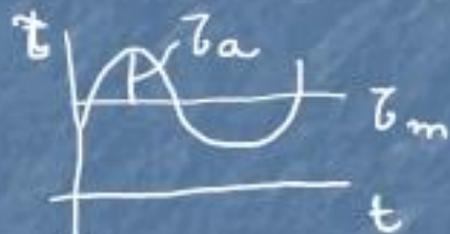
$$n_f = \frac{S_{sa}}{\sigma_a} = \frac{241}{211,3} = \underline{1,14}$$

<https://www.youtube.com/watch?v=jAawhg6JtyY>
<https://www.youtube.com/watch?v=99KNCCLiMQI>

Fadiga de molas

Molas nunca sofrem tensões totalmente reversas. Ou a mola é de tração ou de compressão. Além disso, muitas vezes trabalham com pré-carga. O pior caso seria quando não existe pré-carga e $\sigma_{mín} = 0$

$$F_a = \frac{F_{máx} - F_{mín}}{2} \quad e \quad F_m = \frac{F_{máx} + F_{mín}}{2}$$



$$\sigma_a = K_B \frac{8 F_a D}{\pi d^3} \quad \sigma_m = K_B \frac{8 F_m D}{\pi d^3}$$

Exemplo: mola de fio musical $d = 2,3 \text{ mm}$ $D_{\text{externo}} = 14 \text{ mm}$ $L_0 = 98 \text{ mm}$



$$C = \frac{D}{d} = \frac{11,7}{2,3} = 5,09$$

$$K_B = \frac{4C+2}{4C-3} = 1,288$$

$N_a = 21$ espiras, esquadrejadas e esmerilhadas

não fatiada, pré-carga de 22 N
carga máxima 156 N

$$F_a = \frac{156 - 22}{2} = 67 \text{ N}$$

$$F_m = \frac{156 + 22}{2} = 89 \text{ N}$$

$$\sigma_a = 211,32 \text{ MPa}$$

$$\sigma_m = 280,7 \text{ MPa}$$

Tab 10-4 $\rightarrow A = 2,211 \text{ MPa mm}^m$ e $m = 0,145$

$$S_{ut} = \frac{A}{d^m} = 1959 \text{ MPa}$$

$$S_{su} = 0,67 S_{ut} = 0,67 (1959) = 1312 \text{ MPa}$$

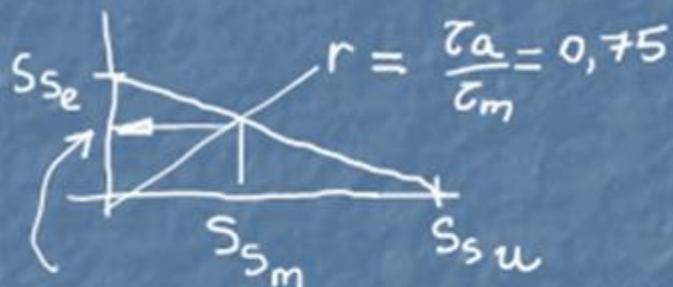
caso geral

a) usando Goodman, é necessário encontrar S_s
 → não há concentrações de tensão p/ molas

usando os dados de Zimmerli $S_{sa} = 241 \text{ MPa}$
 $S_{sm} = 379 \text{ MPa}$

$$\frac{S_{sa}}{S_{se}} + \frac{S_{sm}}{S_{su}} = 1$$

$$\Rightarrow S_{se} = \frac{241}{1 - \frac{379}{1312}} = 338,9 \text{ MPa}$$



$$0,75 S_{sm} = S_{sa}$$

$$\frac{S_{sa}}{S_{se}} + \frac{S_{sa}/0,75}{S_{su}} = 1 \Rightarrow S_{sa} = 273,6 \text{ MPa}$$

então o fator de segurança contra a fadiga p/ vida infinita é $n_f = \frac{273,6}{211,3} = 1,29$

b) Pelo critério de Sines $n_f = \frac{241}{211,3} = 1,14$