MAT0310 - Geometria III - IME/USP
Lista 5 - 2023
Profa. Cláudia Cueva Candido

1. Investigue, por meio de esboços, o resultado da aplicação das compostas abaixo sobre um segmento. Analise casos especiais. Em cada item, a ordem de composição importa?

a) Duas rotações com mesmo centro: $R_{0,\alpha}$ com $R_{0,\beta}$;

b) Duas rotações com centros distintos: $R_{0_1,\alpha}$ com $R_{0_2,\beta}$;

c) Uma translação com uma rotação: $T_{\vec{v}}$ com $R_{0,\alpha}$.

2. Um grupo de transformações $\mathcal{G}$ é chamado cíclico se existe transformação F tal que $\mathcal{G}$ é gerado por F, ou seja, $\mathcal{G} = [F] =\{\mathrm{F}^n\text{: n} \in \mathbb{N}\}$.

a) Verifique que $\mathcal{G} = [R_{0,\pi/3}]$ é um grupo cíclico finito.

3. Seja $F = R_{0,\alpha},\ \alpha = \dfrac{2\pi}{10}$.

a) Mostre que $\mathcal{G} = [F]$ é um grupo cíclico finito com dez elementos.

b) Mostre que $[F] = [F^3] = [F^7] = [F^9]$.

4. Mostre que as circunferências com centro O são invariantes pelas rotações $R_{0,\alpha}$ para qualquer valor do ângulo α.

Sugestão: Para resolver as questões 5,6 e 7 pode ser útil a ideia de ”problema típico que envolve rotações”. Trata-se de construir um segmento com extremos A e B pertencentes a duas curvas dadas r e s, A e B equidistantes de um ponto O e definindo com este um ângulo α. Ou seja, B deve ser $R_{0,\alpha}(A)$. Se $A \in r$, então B deverá estar na intersecção de s com $R_{0,\alpha}(r)$ ou com $R_{0,-\alpha}(r)$.

5. Encontrar um triângulo equilátero cujos vértices pertencem a três retas paralelas distintas.

6. Encontrar um triângulo equilátero cujos vértices pertencem a três circunferências concêntricas distintas.

7. Dadas duas retas r e s, um ponto 0 e um ângulo de medida $\alpha, 0 < \alpha < \pi$, construir uma circunferência com centro O que intercepte as retas r e s nos pontos R e S, respectivamente, de forma que a medida do $\measuredangle\ R0S$ seja igual a α.

8. Sendo O o centro do quadrado $ABCD$ orientado positivamente, mostrar que $R_{B,\frac{\pi}{2}} \circ R_{C,\frac{\pi}{2}} = R_O$.

9. Dados três pontos não colineares M_1, M_2, M_3 e três ângulos de medidas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, $0 < \alpha_i < \pi$, determine um triângulo ABC tal que M_1, M_2, M_3 sejam os vértices de triângulos isósceles construídos externamente sobre os lados do ΔABC de modo que as medidas dos ângulos dos vértices M_i sejam os valores dados $\alpha_i, i = 1, 2, 3$.

10. Mostre que os centros dos quadrados construídos externamente sobre os lados de um paralelogramo são vértices de um quadrado.

11 Sendo m_1 e m_2 retas distintas mostre que se P é um ponto fixo de $R_{m_2} o R_{m_1}$, então P é o ponto de intersecção de m_1 com m_2.

12 Sejam $\vec{v}$ um vetor não nulo e m uma reta perpendicular à direção de $\vec{v}$. Mostre que a composta de R_m e $T_{\vec{v}}$, em qualquer ordem, é uma reflexão em relação a uma reta paralela a m.

13 Dados uma reta m e duas circunferências S_1 e S_2 construa um quadrado $ABCD$ que tenha dois vértices opostos B e D em m , o vértice A em S_1 e o vértice C em S_2.

14 Dados uma reta m e três pontos distintos P, Q e $R_m(P)$, determine o ponto $R_m(Q)$ usando apenas régua não graduada.

15 Mostre que se um triângulo tem um eixo de simetria então ele é isósceles. Pode um triângulo ter exatamente dois eixos de simetria?