ZAB0161 - Álgebra linear com aplicações em geometria analítica

Nome do aluno:	NOTA:
Número USP:	**Prova P2 (X1). Data: 03/06/2023**

Justifique as respostas. Colocar na prova toda conta necessária para chegar na solução.

1. Seja a transformação linear $T : P_2 \to M_{2\times 2}$. São conhecidas três imagens:
   $T\left(2t^2\right) = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $T\left(1-t\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ e $T\left(5\right) = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$.
   Determine a fórmula da transformação linear T para um polinómio $p \in P_2$, e o núcleo de T.
   Resolução:
   Observar que os três polinómios, para os quais é conhecida a imagem, formam uma base em P_2: $\beta = \{2t^2, 1-t, 5\}$.
   Assim, todo polinómio $p(t) = at^2 + bt + c$ deve ter uma combinação linear única para β. Isto é
   $$at^2 + bt + c = c_1(2t^2) + c_2(1-t) + c_3(5).$$
   Resolvendo $c_1 = \frac{1}{2}a$, $c_2 = -b$ e $c_3 = \frac{1}{5}(c+b)$. Logo
   $$\begin{aligned} T(p) &= \frac{1}{2}a \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - b \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{5}(c+b) \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2a+c & 2a+c \\ a - \frac{14}{5}b + \frac{6}{5}c & \frac{1}{2}a - \frac{7}{5}b + \frac{3}{5}c \end{bmatrix} \end{aligned}$$
   Para determinar o núcleo: $T(p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, donde $c = -2a$ e $b = -\frac{1}{2}a$. Assim
   $$Ker(t) = \left\{ a\left(t^2 - \frac{1}{2}t - 2\right) / \qquad a \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Sejam duas retas $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ que se interceptam no quarto quadrante no ponto M. As retas formam um ângulo de $\alpha = \frac{\pi}{4}$ no ponto M.
   A reta $\mathcal{L}_1$ passa pelo ponto $N = (0,6)$. A reta $\mathcal{L}_2$ passa pelo ponto $R = (r_1, 0)$ com $r_1 > 0$ e tem inclinação $m = 2$.
   Sabendo que o vetor $RM + MN$ é paralelo ao vetor $(-1,1)$ determine: uma equação vetorial da reta $\mathcal{L}_1$ e uma equação geral da reta $\mathcal{L}_2$.
   Resolução:
   Como $RM + MN = RN = (-r_1, 6)$ e $RN \parallel (-1,1)$ temos $(-r_1, 6) = \beta(-1,1) = (-\beta, \beta)$ então $6 = \beta$, dai $r_1 = 6$, portanto $R = (6,0)$.

Considerando v como vetor de direção de $\mathcal{L}_2$ e pela dado da inclinação $m = 2 = \frac{v_2}{v_1}$. Como podemos tomar qualquer paralelo tomamos $v = (1, 2)$.
Como MR é um vetor na reta, então $v^\perp \cdot MR = 0 \Rightarrow (-2, 1) \cdot (6 - m_1, -m_2) = 0 \Rightarrow m_2 = 2m_1 - 12$.
Como $\mathcal{L}_1$ forma $\alpha = \frac{\pi}{4}$ graus com $\mathcal{L}_2$, então α é a bisetriz do ângulo reto. Logo um vetor de direção de $\mathcal{L}_1$ será dado por $w = v + v^\perp = (1, 2) + (-2, 1) = (-1, 3)$.
Agora, como MN é um vetor sobre a reta $\mathcal{L}_1$, ele é ortogonal ao vetor $w^\perp = (-3, -1)$, então
$w^\perp \cdot MN = 0 \Rightarrow (-3, -1) \cdot (-m_1, 6 - m_2) = 0 \Rightarrow 3m_1 + m_2 = 6 \Rightarrow m_2 = 6 - 3m_1 \Rightarrow 18 = 5m_1$.
Resolvendo o sistema de equações temos $M = \left(\frac{18}{5}, -\frac{24}{5}\right)$.
Como é conhecido o vetor ortogonal de $\mathcal{L}_1 : P = (0, 6) + t(-1, 3)$.
Conhecemos o vetor ortogonal e um ponto de passagem da segunda reta, então $\mathcal{L}_2 : -2x + y = -12$.

3. Encontre uma base e determine a dimensão do espaço vetorial

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a-b \\ b+c \\ c-b+2a \end{bmatrix} / \qquad a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Resolução:

$$\begin{bmatrix} a-b \\ b+c \\ 2a+c-b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Aparentemente esses três vetores coluna fijos formam uma base para G, mas não são linearmente independentes. Observar que o terceiro vetor é a soma dos dois primeiros, e os dois primeiros são L.I. Assim a dimensão de G é 2. E uma base é

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

4. Sejam os planos $\mathcal{P} : x + y + z = 2$ e $\bar{\mathcal{P}} : x + y - z = 2$. Determine as equações paramétricas da reta interseção $\mathcal{L} = \mathcal{P} \cap \bar{\mathcal{P}}$.
Determine também, as equações das duas retas paralelas a $\mathcal{L}$ que estão no plano $\mathcal{P}$ e equidistam $\sqrt{6}$ unidades.
Resolução:
A reta interseção satisfaz

$$\mathcal{L} : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y - z = 2 \end{cases}.$$

Assim, temos duas equações (pois a reta pertence aos dois planos) e três variáveis. Podemos considerar uma livre, observar que z não pode ser livre, dado que resolvendo para z obtemos $z = 0$. Logo as equações paramétricas da reta são

$$\mathcal{L} : \begin{cases} x = 2 - s \\ y = s \\ z = 0 \end{cases}.$$

Para determinar as retas paralelas a $\mathcal{L}$ em $\mathcal{P}$, podemos pegar um ponto de passagem da reta $\mathcal{L}$ e considerando um vetor ortogonal unitário v_u a essa reta, mas considerado sobre o plano, encontraremos um ponto afastado o tanto de unidades longe de $\mathcal{L}$. Seja o ponto $P_0 = (2, 0, 0)$ da reta $\mathcal{L}$. Um vetor de direção de $\mathcal{L}$ é $w = (-1, 1, 0)$. Um vetor ortogonal a $\mathcal{L}$ sobre o plano $\mathcal{P}$ se obtem com o produto vetorial do vetor normal a $\mathcal{P}$ (que é $n = (1, 1, 1)$) produto vetorial o vetor de direção de $\mathcal{L}$. Isto é

$$v = n \times w = (1, 1, 1) \times (-1, 1, 0) = (-1, -1, 2).$$

Onde $v_u = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2)$. Com isto obtemos um ponto no plano $\mathcal{P}$ que dista $\sqrt{6}$ unidades do ponto P_0, fazendo

$$P_1 = P_0 + \sqrt{6} v_u = (2, 0, 0) + (-1, -1, 2) = (1, -1, 2).$$

Considerando o negativo de v_u obtemos

$$P_1 = P_0 - \sqrt{6}v_u = (2,0,0) + (1,1,-2) = (3,1,-2).$$

As retas paralelas tem o mesmo vetor de direção de $\mathcal{L}$, passando cada uma pelo ponto correspondente a distância $\sqrt{6}$, isto é

$$\mathcal{L}_1 : \begin{cases} x = 1 - s \\ y = -1 + s \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_2 : \begin{cases} x = 3 - s \\ y = 1 + s \\ z = -2 \end{cases} .$$