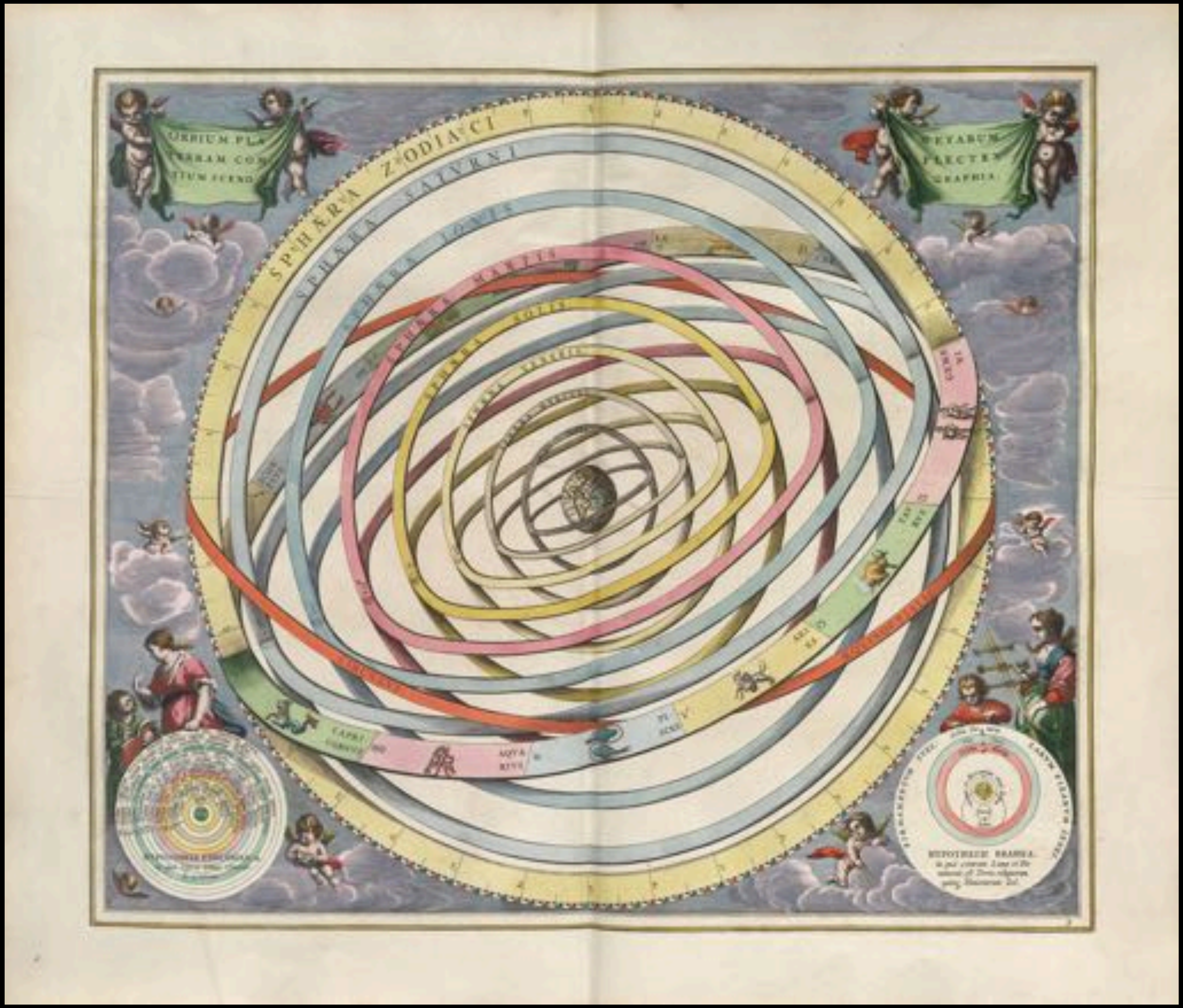
Física I

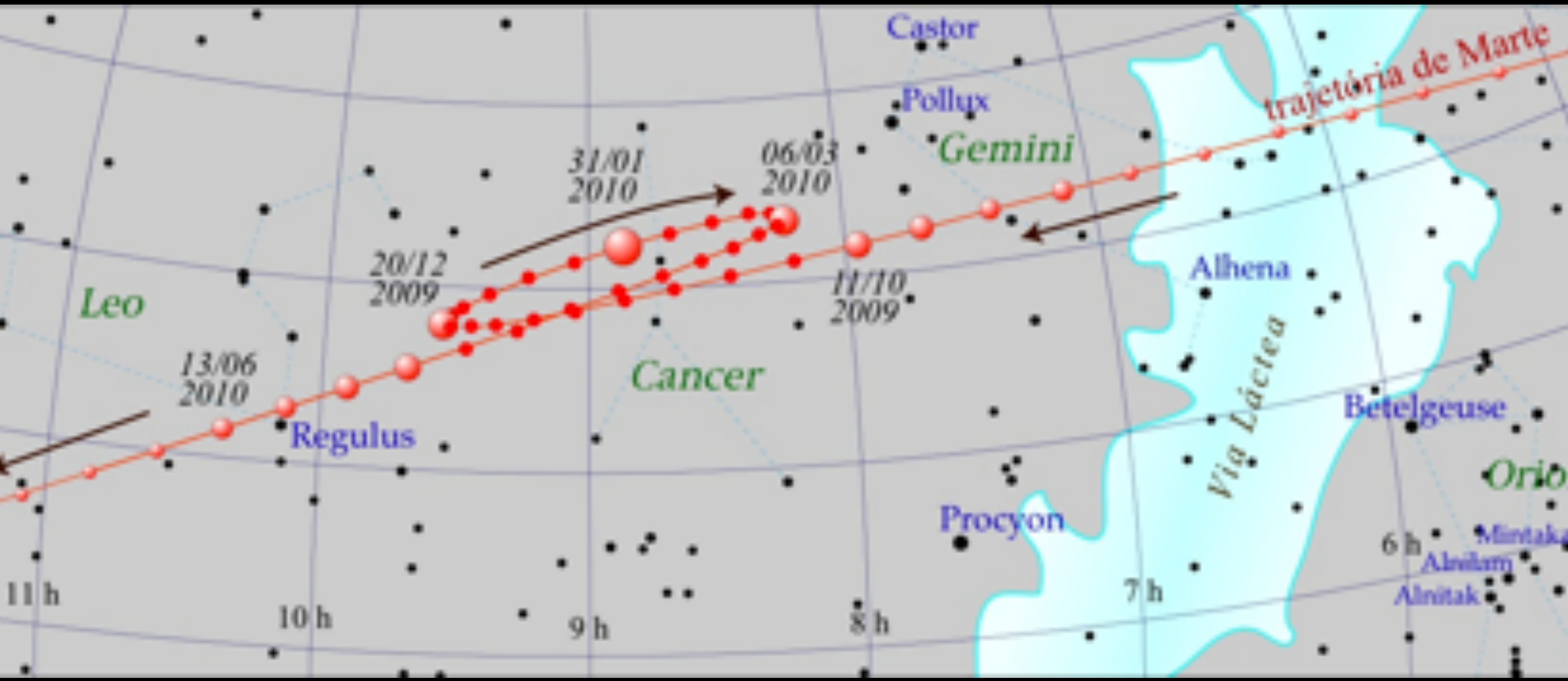
A Lei da Gravitação Universal

Física I



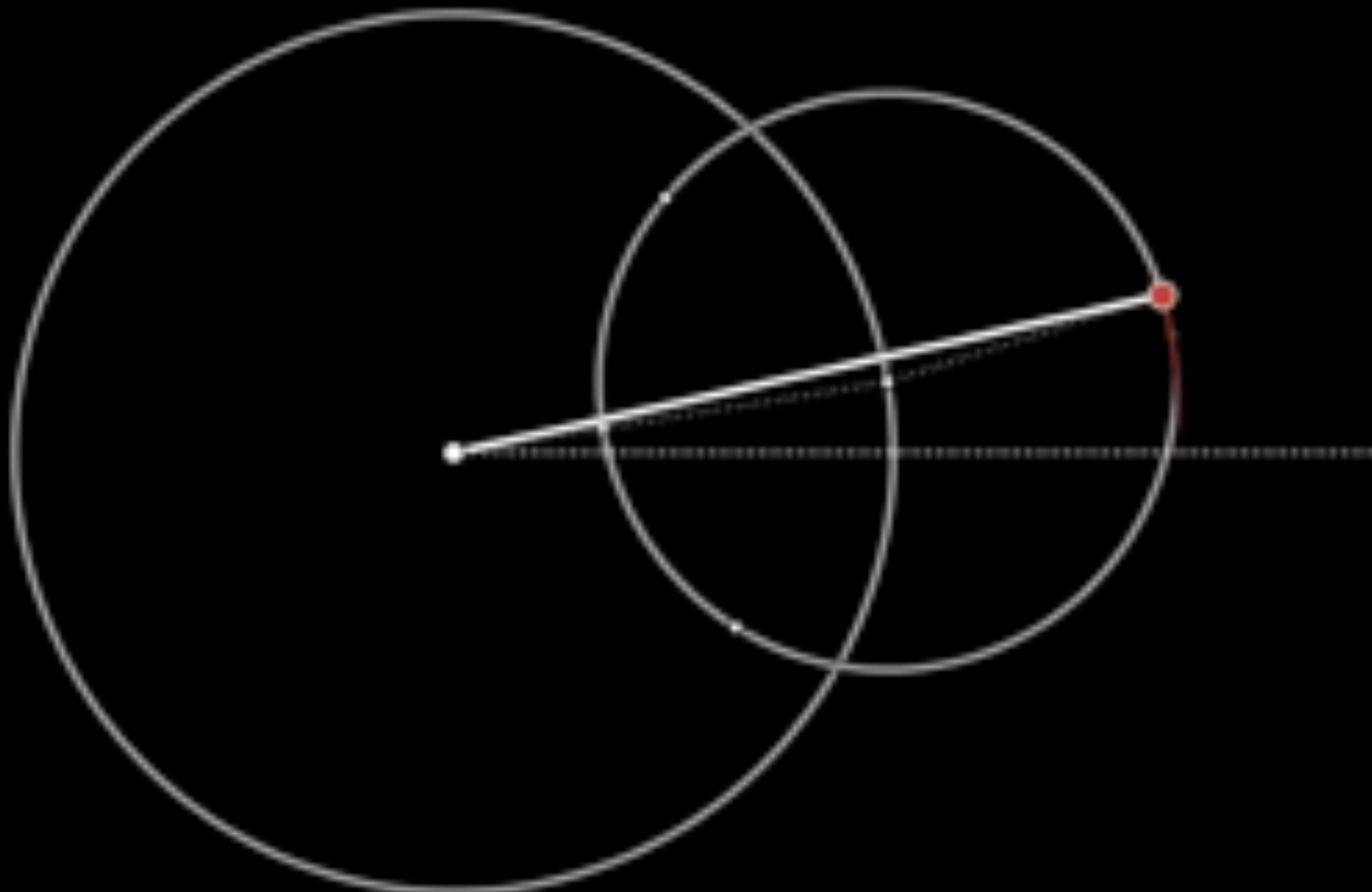
Modelo geocêntrico (Aristóteles, Ptolomeu etc.)

Física I



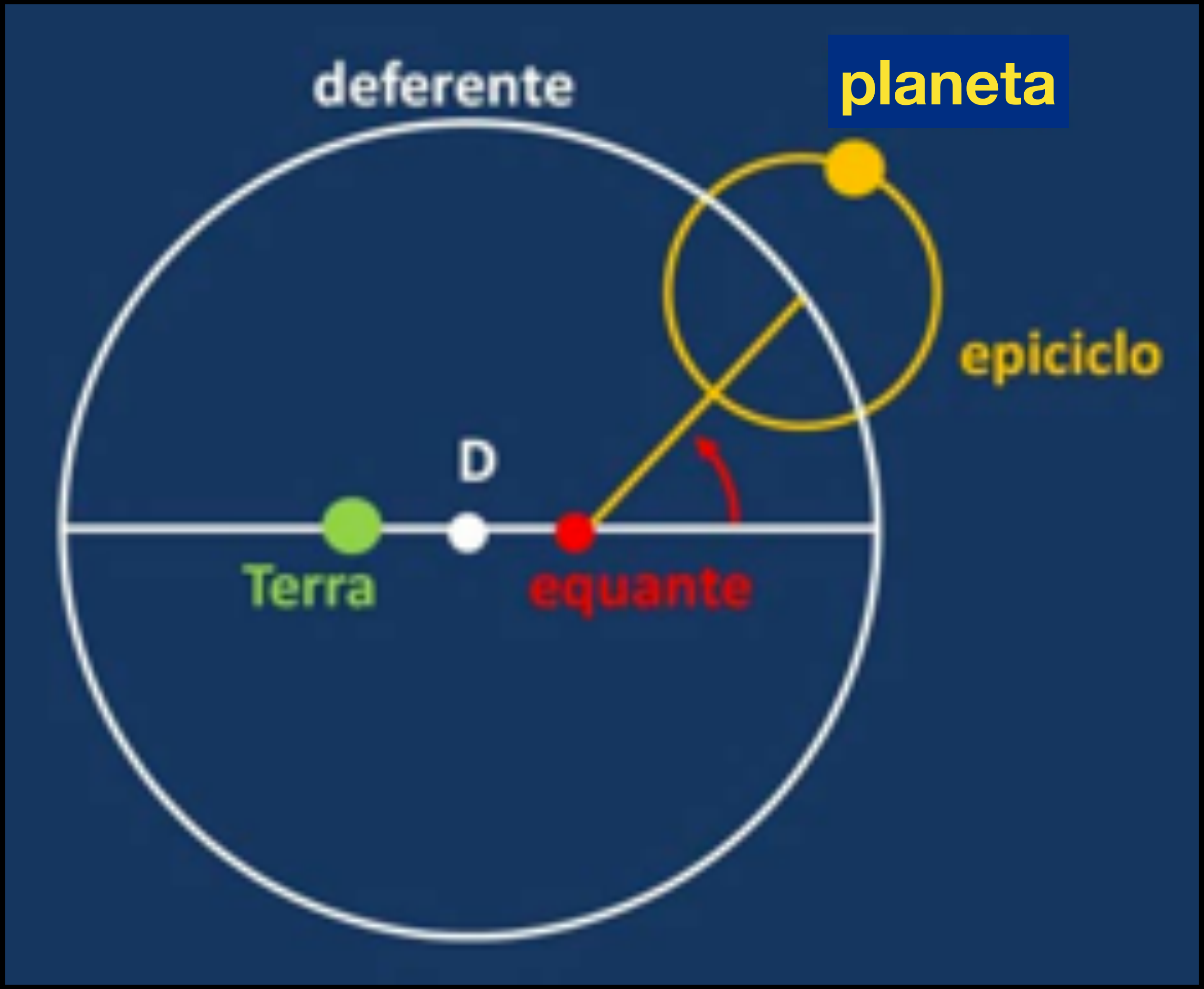
Pequeno problema: planetas (“errantes”)

Física I



Primeira tentativa: epiciclos

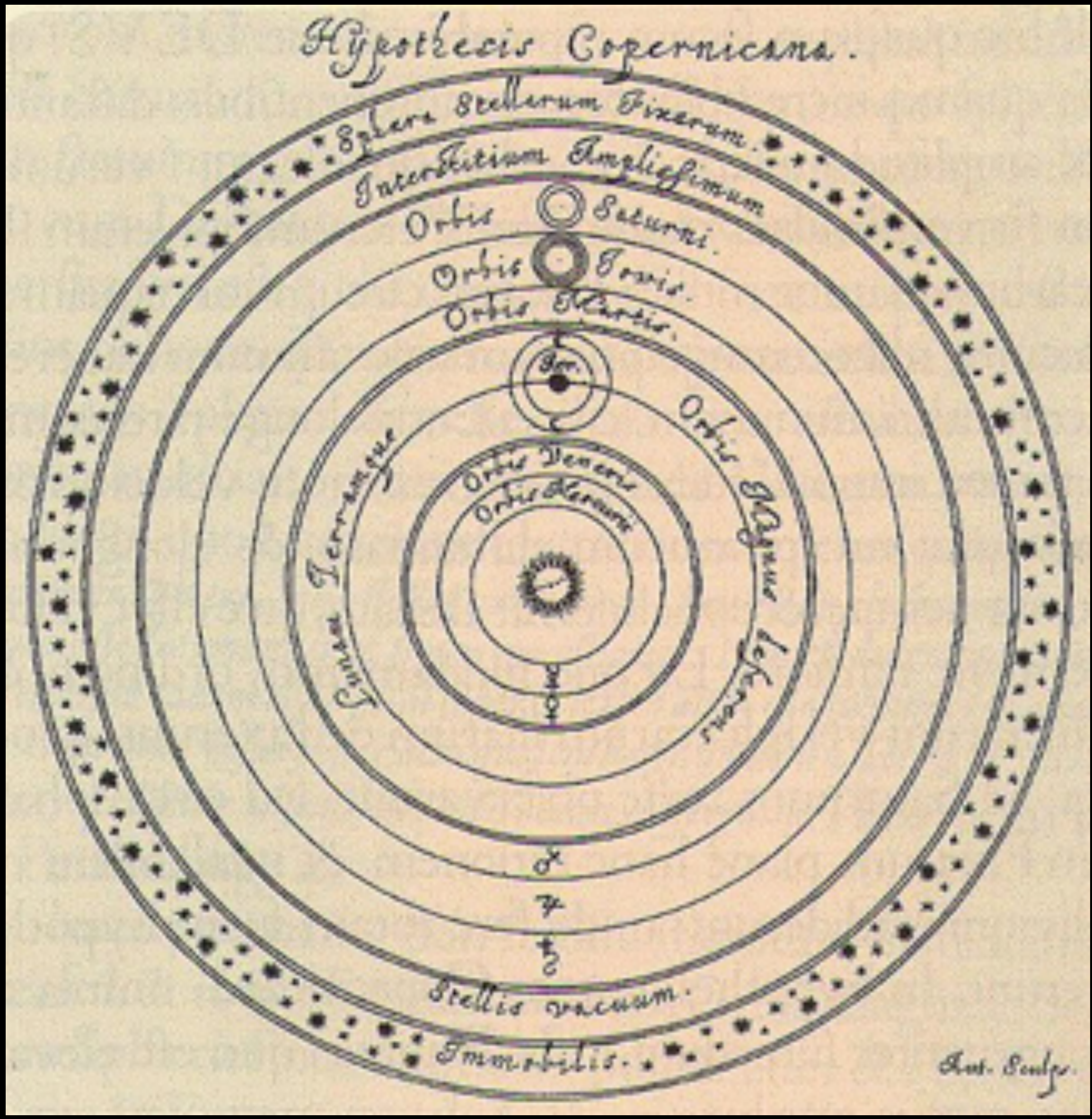
Física I



Segunda tentativa: equante e deferente

Física I


NICOLAI
COPERNICI TO-
RINENSIS DE REVOLVTIONI-
bus orbium cœlestium,
Libri VI.
IN QVIBVS STELLARVM ET FI-
BASILEAE, EX OFFICINA
HENRICPETRINA



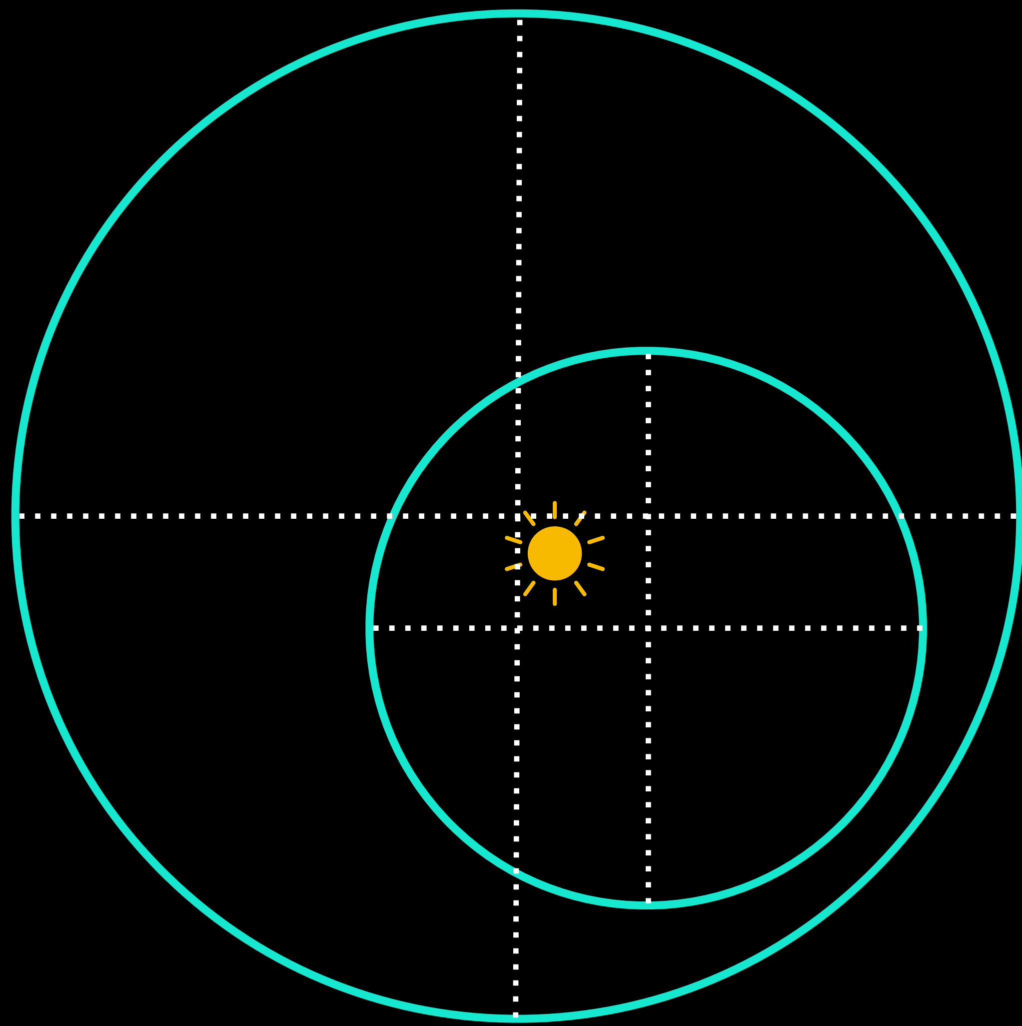
Nicolau Copérnico (1473-1543)

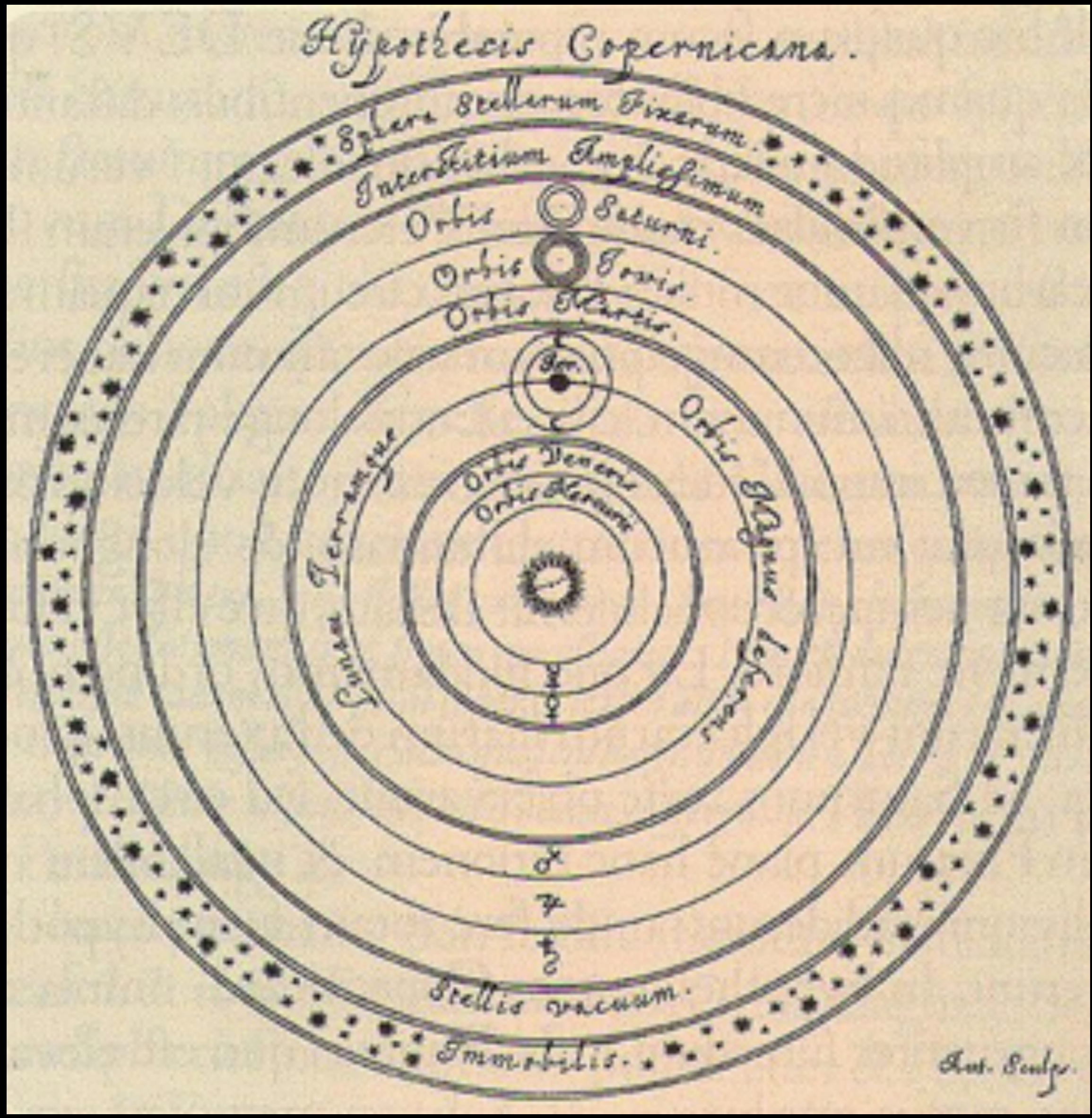
Física I

Período	Copérnico	Atual
Mercúrio	87,97 dias	87,97 dias
Vênus	224,70 dias	224,70 dias
Terra	365,26 dias	265,26 dias
Marte	1,882 anos	1,881 anos
Jupiter	11,87 anos	11,862 anos
Saturno	29,44 anos	29,46 anos

Período sideral dos planetas

Física I





Modelo Copernicano continha algumas gambiarras…

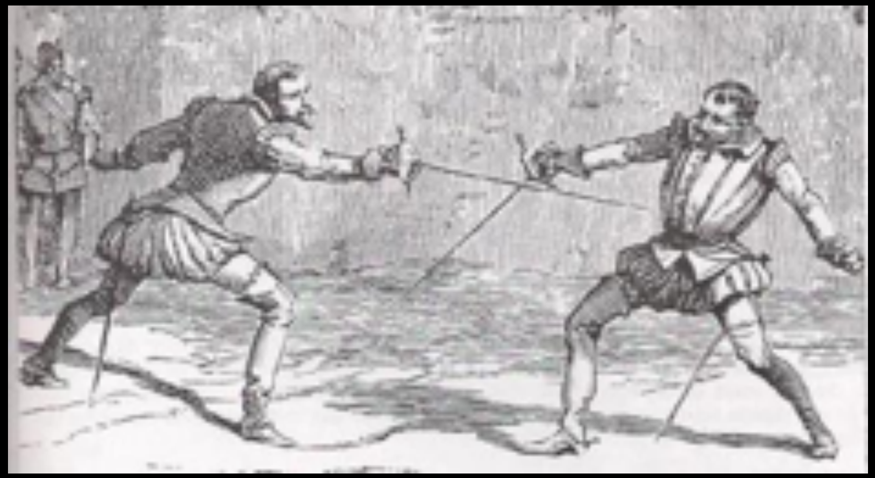
Física I

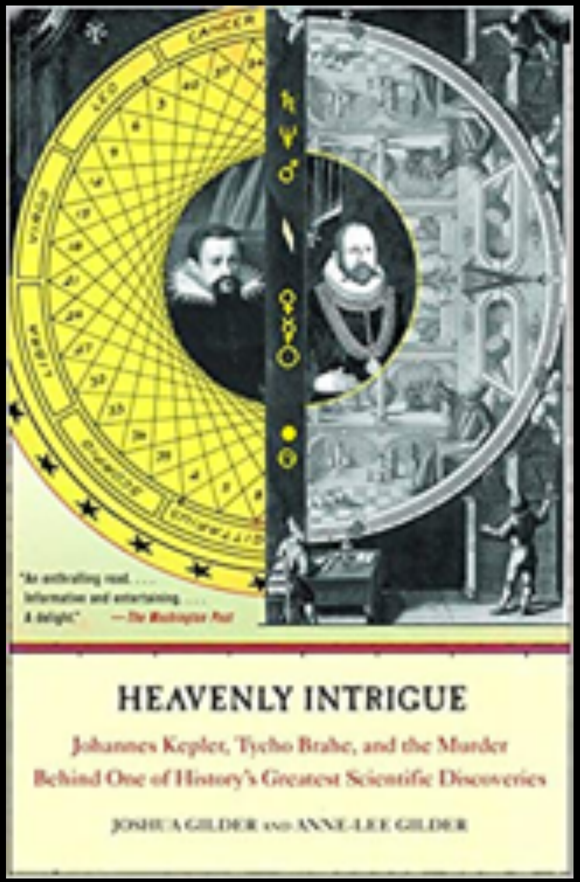
… e **mesmo assim** o modelo não funcionava bem!
Nesse momento **T. Brahe** e **J. Kepler** entram na história

Física I

Tycho Brahe (1546-1601)

Física I



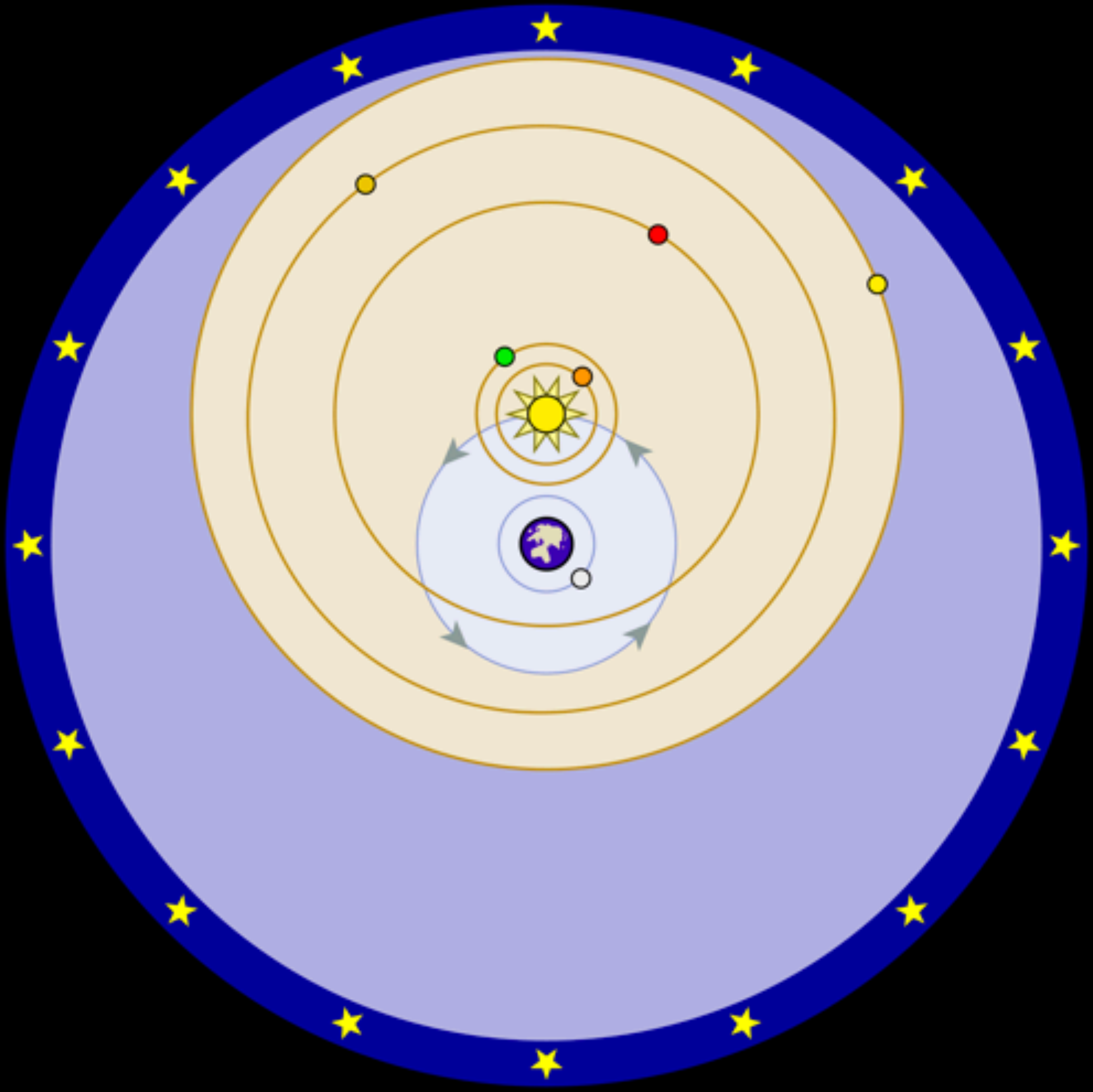


Tycho Brahe: nobre, matemático, boêmio, astrônomo

Física I

Tycho Brahe: astronomia “de olhômetro”

Física I



O modelo de Tycho Brahe

Física I

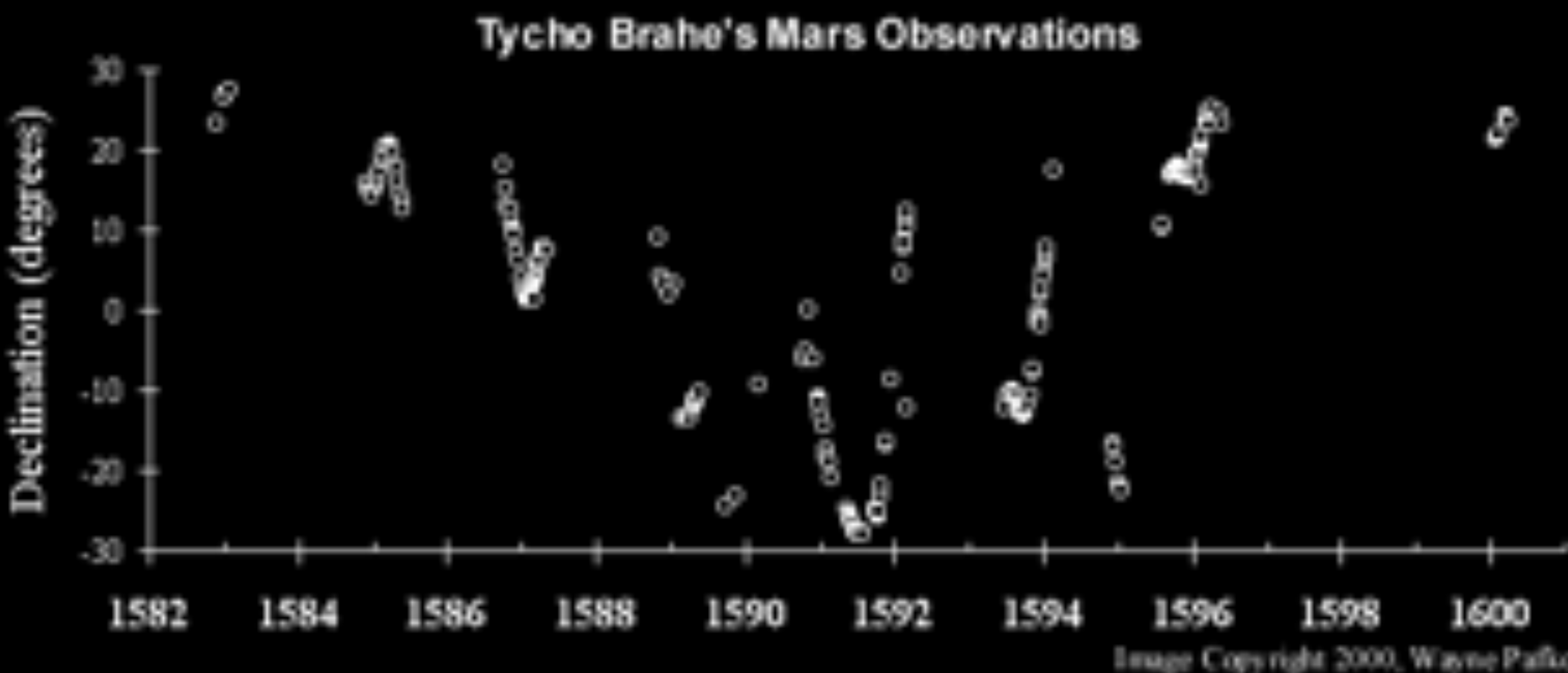
Harmonia Mundis

Johannes Kepler (1571-1630)

Física I

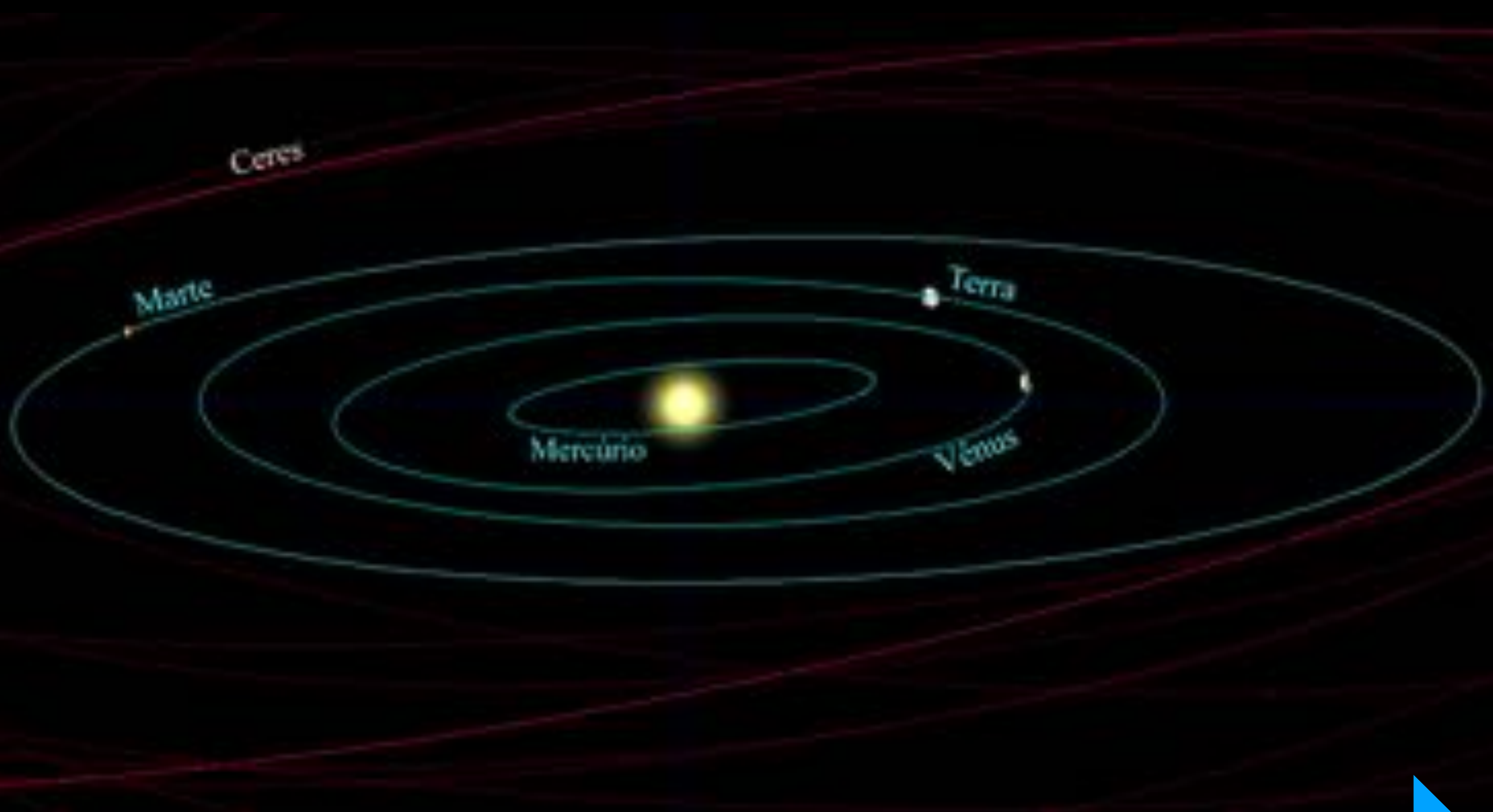
Tycho Brahe morreu 1 ano após Kepler virar seu assistente, e Kepler herdou suas medidas

Física I



Com base nas medidas de Tycho Brahe, Kepler pôde compreender de que modo os planetas se movem

Física I



Modelo heliocêntrico de Kepler

Copernico *x* Kepler

Física I

Órbitas!

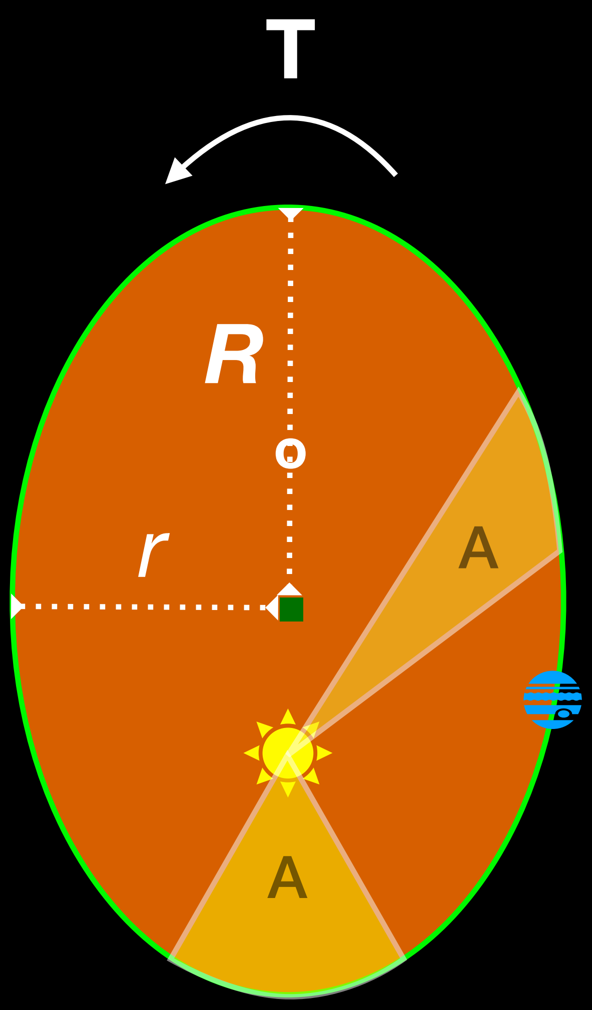
Física I

1ª Lei de Kepler:
Os planetas orbitam o Sol em **elipses**, com o Sol em um **foco** da elipse

2ª Lei de Kepler:
O raio do Sol aos planetas descreve **áreas iguais** em **tempos iguais**

3ª Lei de Kepler:
Os **quadrados** dos **períodos** são proporcionais aos **cubos** das **distâncias**

$$T^2 = \alpha\, R^3$$



Leis de Kepler (1618)

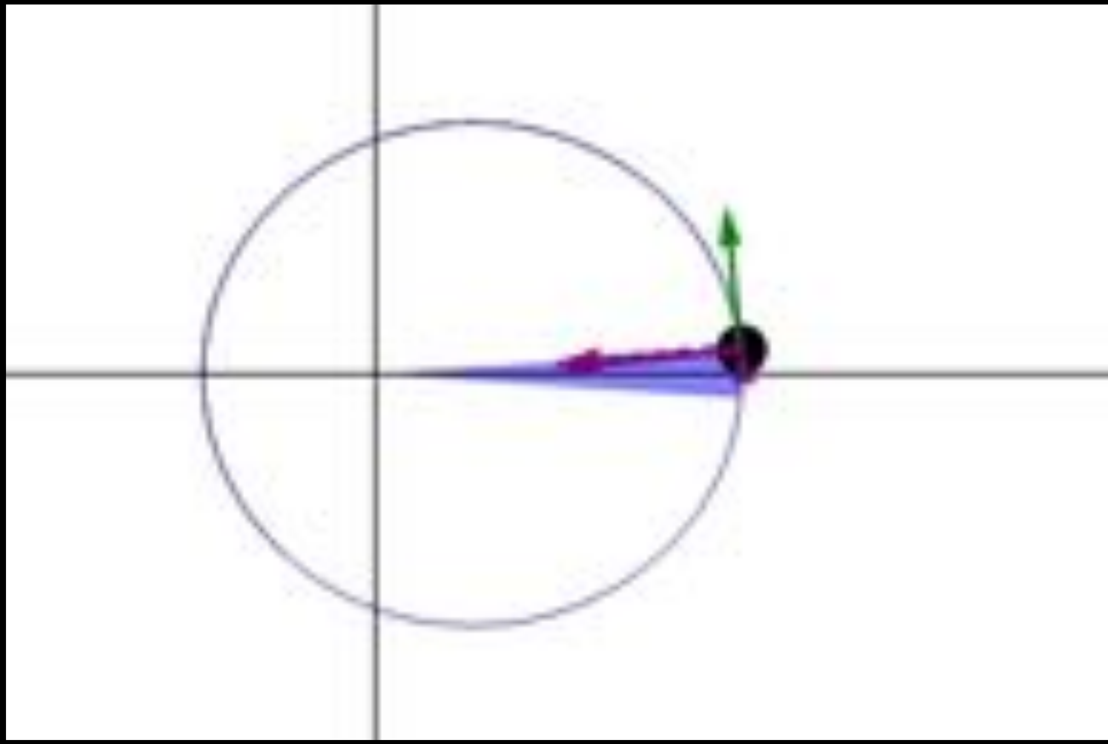
Física I

1ª Lei de Kepler:
Os planetas orbitam o Sol em **elipses**, com o Sol em um **foco** da elipse

2ª Lei de Kepler:
O raio do Sol aos planetas descreve **áreas iguais** em **tempos iguais**

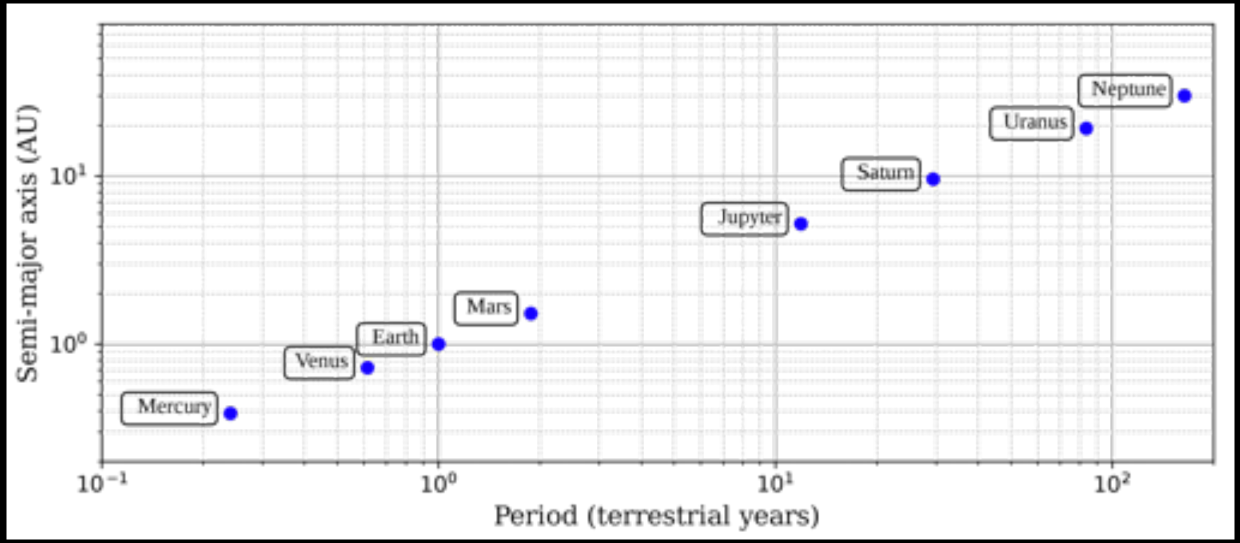
3ª Lei de Kepler:
Os **quadrados** dos **períodos** são proporcionais aos **cubos** das **distâncias**

$$T^2 = \alpha\, R^3$$



Leis de Kepler (1618)

Física I



1ª Lei de Kepler:
Os planetas orbitam o Sol em **elipses**, com o Sol em um **foco** da elipse

2ª Lei de Kepler:
O raio do Sol aos planetas descreve **áreas iguais** em **tempos iguais**

3ª Lei de Kepler:
Os **quadrados** dos **períodos** são proporcionais aos **cubos** das **distâncias**

$$T^2 = \alpha\, R^3$$

Kepler (~Séc. 17)

Planet	Mean distance to sun (AU)	Period (days)	$\frac{R^3}{T^2}$ (10^{-6} AU^3/day^2)
Mercury	0.389	87.77	7.64
Venus	0.724	224.70	7.52
Earth	1	365.25	7.50
Mars	1.524	686.95	7.50
Jupiter	5.2	4332.62	7.49
Saturn	9.510	10759.2	7.43

Medidas modernas

Planet	Semi-major axis (AU)	Period (days)	$\frac{R^3}{T^2}$ (10^{-6} AU^3/day^2)
Mercury	0.38710	87.9693	7.496
Venus	0.72333	224.7008	7.496
Earth	1	365.2564	7.496
Mars	1.52366	686.9796	7.495
Jupiter	5.20336	4332.8201	7.504
Saturn	9.53707	10775.599	7.498
Uranus	19.1913	30687.153	7.506
Neptune	30.0690	60190.03	7.504

Leis de Kepler (1618)

Física I

Note que a ***3ª Lei de Kepler*** aplicada ao movimento dos ***planetas*** em torno do ***Sol*** nos dá:

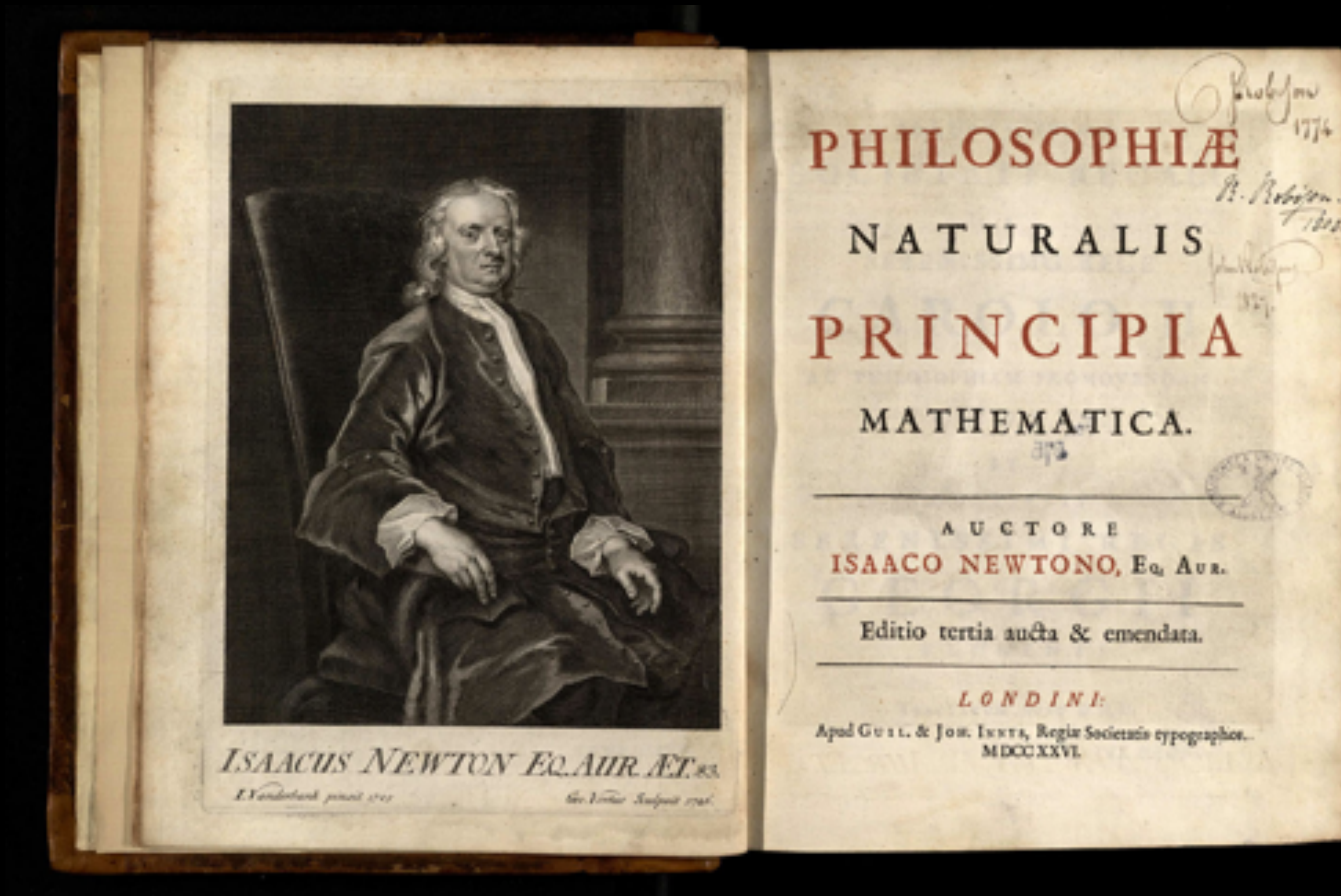
$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{(1\,\mathrm{au})^3}{(365\,\mathrm{dia})^2} = 7{,}5061 \times 10^{-6}\,\mathrm{au}^3\,\mathrm{dia}^{-2}$$

No caso do ***movimento da Lua e dos satélites*** em torno da ***Terra*** temos:

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{(0{,}002569\,\mathrm{au})^3}{(28\,\mathrm{dia})^2} = 2{,}163 \times 10^{-11}\,\mathrm{au}^3\,\mathrm{dia}^{-2}$$

Portanto, a constante $R^3/T^2 = 1/\alpha$ é uma ***propriedade do corpo central*** — possivelmente a… massa?…

Física I



Isaac Newton (1643-1727)

Física I

1665

A peste bubônica se espalha pela Inglaterra, fechando Cambridge. Newton se refugia na fazenda da família em Woolsthorpe.

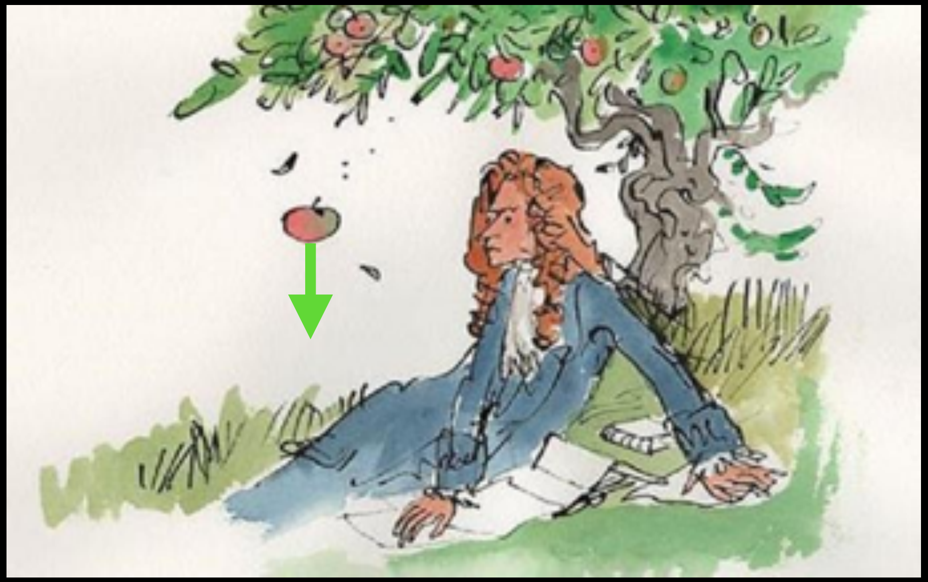
Naquele ano ele vai criar:

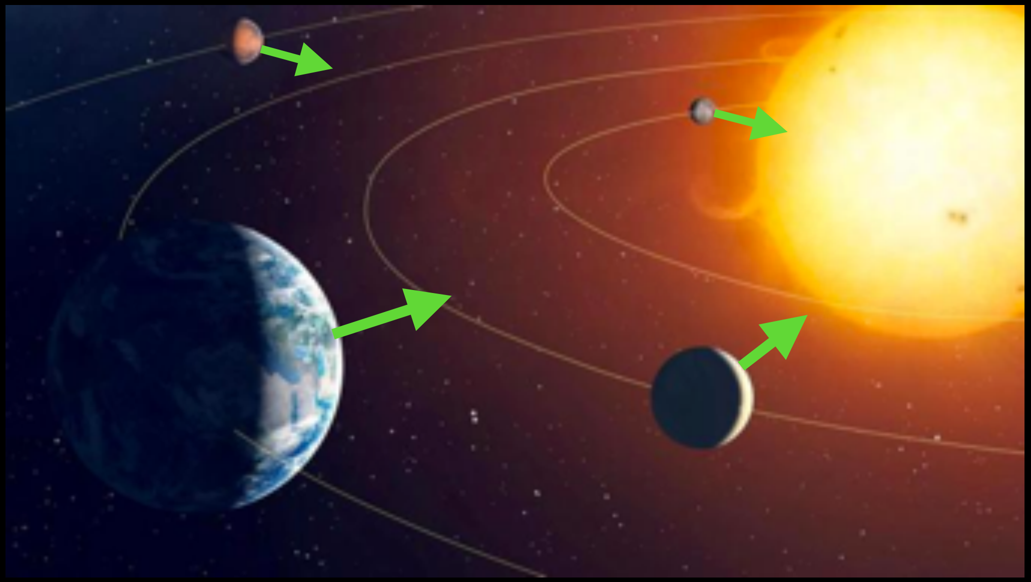
- ⋆ O cálculo diferencial e integral
- ⋆ A Óptica (como ela é entendida hoje)
- ⋆ A Lei da Gravitação

Newton sobre ele mesmo
"I do not know what I may appear to the world, but to myself I seem to have been only like a boy playing on the sea-shore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary, whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me."

Isaac Newton (1643-1727)

Física I





Eureka! Gravidade = força

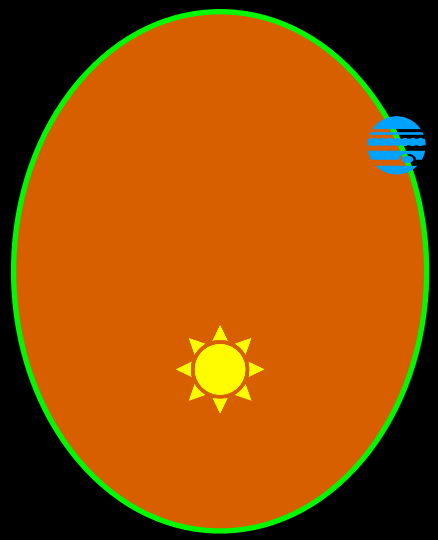
Física I

Órbitas:
resultado da força

Mas **qual** força?

Lei da Gravitação Universal

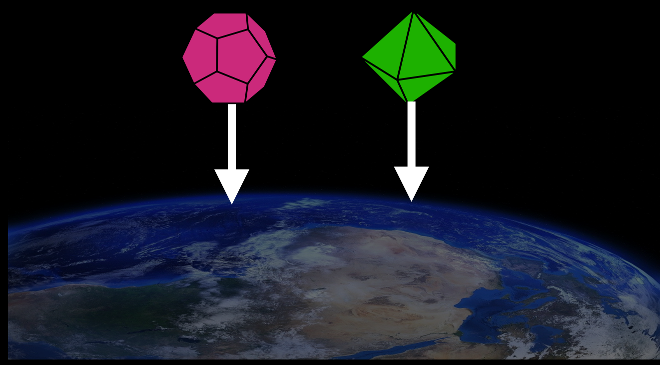
- Nosso ponto de partida é a 3a Lei de Kepler:



$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{1}{\alpha} \, ,$$

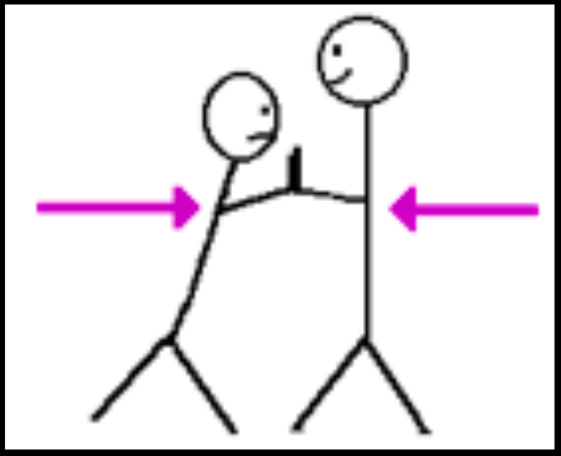
onde α deve ser uma ***propriedade da massa central*** – por exemplo, o corpo celeste.

- Vamos lembrar que, como demonstrado por Galileu, a ***aceleração da gravidade*** é igual para todos os corpos, o que significa que a ***força gravitacional*** é ***proporcional à massa***:



$$\vec{F}_G = m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$$

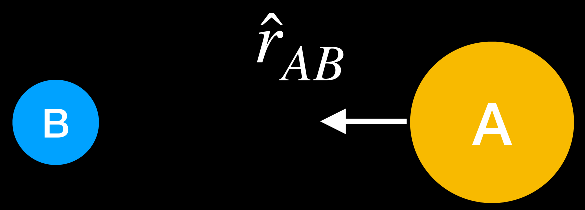
- Mas, pela 3a Lei de Newton, a força que um corpo A exerce sobre outro corpo B é sempre contrabalançada por uma força de módulo igual e sentido oposto, exercida pelo corpo B sobre o corpo A (também conhecida como **Lei da *conservação de momento***):



$$\vec{F}_{A \to B} = - \vec{F}_{B \to A}$$

Lei da Gravitação Universal

- Juntando duas "pistas" acima Newton supôs que:

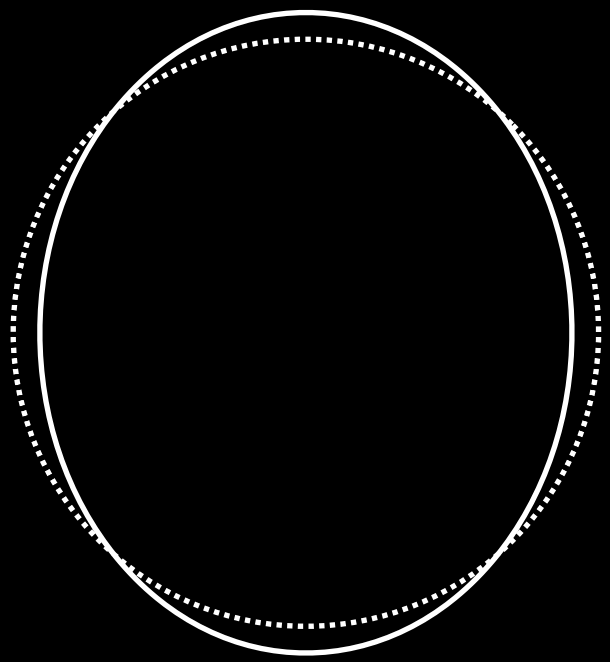


$$\vec{F}_{A \to B} \sim -M_A M_B \hat{r}_{AB}$$

- Vamos agora tentar usar a 3a Lei de Kepler para nos ajudar. Assim, vamos supor que os corpos A e B são o Sol (A) e um planeta (B), ou a Terra (A) e a Lua (B). Sabemos que:

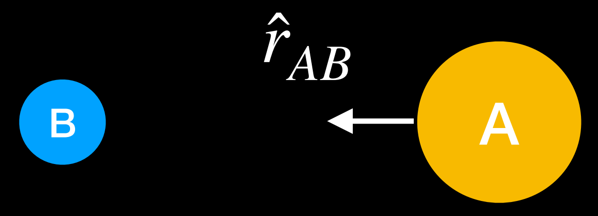
$$\frac{R_B^3}{T_B^2} = \frac{1}{\alpha_A} \sim M_A \quad \Rightarrow M_A = \beta \frac{1}{\alpha_A} = \beta \frac{R_B^3}{T_B^2}$$

- Vamos testar isso: numa órbita elíptica cujo raio médio é R_B, a aceleração angular é, na média:



$$\vec{a}_B = -\omega_B^2 R_B \hat{r}_{AB} \quad , \quad \omega_B = \frac{2\pi}{T_B}$$

Lei da Gravitação Universal



- Acabamos de obter, portanto, que:

$$\vec{a}_B = -\frac{4\pi^2}{T_B^2} R_B \, \hat{r}_{AB} \quad , \quad \text{e assim a } \textbf{\textit{força}} \text{ de A em B é:}$$

$$\vec{F}_{A\to B} = -\, M_b \, \frac{4\pi^2}{T_B^2} R_B \, \hat{r}_{AB}$$

- Por outro lado, também temos que a força deve ser proporcional à massa M_A , que é

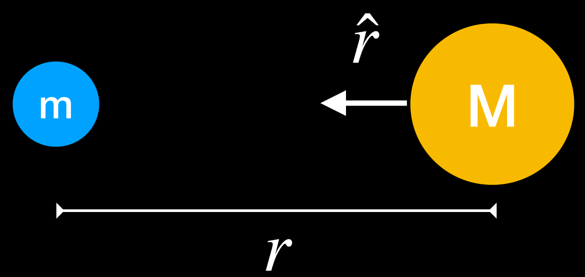
$$M_A \;=\; \beta \frac{R_B^3}{T_B^2} \quad \Rightarrow T_B^2 \;=\; \frac{\beta \, R_B^3}{M_A}$$

- Portanto, substituindo acima temos:

$$\vec{F}_{A\to B} = -\, M_B \, \frac{4\pi^2}{\left(\frac{\beta \, R_B^3}{M_A}\right)} R_B \, \hat{r}_{AB} \;\; = -\underbrace{\boxed{\frac{4\pi^2}{\beta}}}_{G} M_A M_B \, \frac{1}{R_B^2} \, \hat{r}_{AB}$$

Lei da Gravitação Universal

- Ou, numa notação menos prolixa:



$$\vec{F} = -\,G\,M\,m\,\frac{1}{r^2}\,\hat{r}$$

- A constante de Newton é ***medida*** como sendo:

$$G = 6{,}674 \times 10^{-11}\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{m}^3\ \mathrm{s}^{-2}$$