Aula 17: Compactos III

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

1^o **Semestre de 2023 - Curso de Topologia**

Na aula passada – Algumas caracterizações de compactos

Vamos gora trabalhar com um conceito que é usado muitas vezes com a compacidade.

Definição 1

Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $x \in X$ é um ponto de acumulação de $A \subset X$ se $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Note que se x é ponto de acumulação de A, então $x \in \bar{A}$. Mas não necessariamente vale a volta (ver exercício).

Proposição 2

Seja (X, τ) espaço T_1. Então $x \in X$ é ponto de acumulação de $A \subset X$ se, e somente se, para todo V aberto tal que $x \in V$ temos que $V \cap A$ é infinito.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Seja V aberto tal que $x \in V$. Suponha $V \cap A$ finito. Então $V' = V \setminus (A \setminus \{x\})$ é um aberto (usamos aqui T_1) tal que $x \in V'$ e $V' \cap A \subset \{x\}$ e, portanto, x não é ponto de acumulação.

$(\Leftarrow)$Por outro lado, se para todo V aberto tal que $x \in V$ temos que $V \cap A$ é infinito, então $V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ e, portanto, x é ponto de acumulação de A.

A compacidade implica na existência de pontos de acumulação para conjuntos infinitos.

Proposição 3

Seja (X, τ) compacto. Então todo suconjunto infinito admite ponto de acumulação.

Demonstração. Seja $A \subset X$ um conjunto infinito. Suponha que todo $x \in X$ não é ponto de acumulação de A. Assim, para todo $x \in X$, existe V_x aberto tal que $x \in V_x$ e $V_x \cap A \subset \{x\}$. Note que isso dá uma cobertura aberta para X e, portanto, tem subcobertura finita. Assim, existem $x_1, \ldots, x_n \in X$ tais que $X \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Em particular, $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Mas note que isso implica que $A \subset \{x_1, \ldots, x_n\}$, contradição com a infinitude de A.

Na aula passada paramos aqui!

Há uma caracterização para a compacidade no caso geral em termos de um conceito próximo ao de ponto de acumulação.

Definição 4

Seja (X, τ) *espaço topológico. Dizemos que* $x \in X$ *é um ponto de acumulação completo de* $A \subset X$ *se, para todo* V *aberto tal que* $x \in V$*, temos* $|V \cap A| = |A|$*.*

$|B|$ é a cardinalidade B

A próxima demonstração é muito parecida com a demonstração para pontos de acumulação.

Proposição 5

Seja (X, τ) um espaço compacto. Então todo subconjunto infinito de X admite um ponto de acumulação completo. (vale a volta – Proposição 9)

Demonstração. Seja $A \subset X$ infinito e suponha que A não admite ponto de acumulação completo. Então, para todo $x \in X$, existe V_x aberto tal que $x \in V_x$ e $|V_x \cap A| < |A|$. Pela compacidade, existem $x_1, \ldots, x_n \in X$ tais que $\bigcup_{i=1}^n V_{x_i} = X$. Note que

$$A = (V_{x_1} \cap A) \cup \cdots \cup (V_{x_n} \cap A)$$

e assim obtemos uma contradição pois cada $|V_{x_i} \cap A| < |A|$. De fato:

- $V_{x_i} \cap A$ é finito para para todo $i = 1, \ldots, n$ — óbvio, pois A é infinito
- Ao menos um $V_{x_i} \cap A$ infinito — aqui $\big|(V_{x_1} \cap A) \cup \cdots \cup (V_{x_n} \cap A)\big| = \max_{i=1,\ldots,n} \big|V_{x_i} \cap A\big|$

Para o próximo resultado, precisamos de um conceito de teoria dos conjuntos.

Definição 6

Dizemos que uma ordem total $\leq$ *sobre* X *é uma* ***boa ordem*** *se todo subconjunto não vazio admite mínimo.*

Proposição 7 (Princípio da boa ordem)

Todo conjunto admite uma boa ordem.

Esse resultado pode ser suposto como axioma na teoria dos conjuntos de fato, ele é equivalente ao axioma da escolha.

Muitas vezes ajuda utilizar a seguinte versão do princípio da boa ordem.

Proposição 8 (Princípio da ótima ordem)

Todo conjunto X admite uma boa ordem $\leq$ tal que, para todo $x \in X$,

$$|\{y \in X : y < x\}| < |X|$$

Demonstração. Dado $x \in X$, defina $\downarrow x = \{y \in X : y < x\}$.

Se não existe algum $x \in X$ tal que $|\downarrow x| = |X|$, terminamos. Caso contrário, seja x o menor com tal propriedade. Note que

- $\downarrow x$ é bem ordenado
- $\downarrow x$ tem uma bijeção com X (x é o menor com esta propriedade)

Seja $f : X \to \downarrow x$ uma bijeção. Podemos induzir uma nova boa ordem, $\leq\leq$, sobre X com tal bijeção:

$$w \neq z \in X, \quad w << z \Leftrightarrow f(w) < f(z).$$

Dado $z \in X$, considere $\downarrow\downarrow z := \{w \in X : w << z\} = \{w \in X : f(w) < f(z)\}$. Como $f(z) < x$, temos da minimalidade de x que $\big| \downarrow\downarrow z\big| < \big|X\big|$ para todo $z \in X$, como desejado.

Algumas caracterizações de compactos

Usando esse resultado, podemos terminar a caracterização de compacidade por pontos de acumulação completo.

Proposição 9

Seja (X, τ) *espaço tal que todo subconjunto infinito admite ponto de acumulação completo. Então* X *é compacto.*

Demonstração. Algo mais avançado, não será feito no curso.
Veja A.V. Arkhangel'skii, V.I. Ponomarev, "Fundamentals of general topology: problems and exercises" , Reidel (1984) pp. Chapt. 3. Problem 48 and pp. 165, 166

No caso de espaços métricos, podemos caracterizar a compacidade em termos de sequências. Isso é o que vamos provar nos próximos resultados.

Proposição 10

Seja (X, τ) com base locais enumeráveis e compacto. Então toda sequência admite subsequência convergente.

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Note que podemos supor que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é infinito (caso contrário, teríamos uma subsequência constante convergente). Assim, seja $x \in X$ ponto de acumulação para $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ (Proposição 3). Seja $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base local para x decrescente (a menos de se trocar V_n por $\widetilde{V}_n = \bigcap_{k=1}^{n} V_k$). Seja $x_{n_1} \in V_1$. Para cada $k \geq 2$, escolha $x_{n_k} \in V_k \cap \{x_n : n > n_{k-1}\}$. Note que $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge para x.

Para provarmos a volta do resultado acima no caso de espaços métricos, *o* seguinte resultado será útil - mas ele não é útil apenas para isso, ele também é a chave para definir um importante conceito que é o número de Lebesgue de uma cobertura (ver Lisa de Exercício).

Proposição 11

Seja (X, d) espaço métrico. Suponha que toda sequência de pontos de X admite subsequência convergente. Então dada $\mathcal{C}$ cobertura aberta para X, existe $r > 0$ tal que, para todo $x \in X$, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $B_r(x) \subset C$.

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ cobertura e suponha que não vale o enunciado. Então para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que $B_{\frac{1}{n}}(x_n) \not\subset C$ para todo $C \in \mathcal{C}$.

Vamos mostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não admite subsequência convergente, contrariando nossa hipótese.

Suponha que $x_{n_k} \to x$ para algum x. Seja $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{2}{n}}(x) \subset C$ (existe pois C é aberto). Seja n_k tal que $x_{n_k} \in B_{\frac{1}{n}}(x)$ com $\frac{1}{n_k} < \frac{1}{n}$ (existe pela convergência). Seja $y \in B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k})$. Temos

$$d(x, y) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n_k} < \frac{2}{n},$$

ou seja, $B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subset B_{\frac{2}{n}}(x) \subset C$, contrariando como escolhemos os x_n 's.

Algumas caracterizações de compactos

Um espaço onde toda sequência admite uma subsequência convergente é chamado de sequencialmente completo. Para métricos, esse conceito coincide com a compacidade - mas no caso geral, não vale nenhuma das duas implicações.

Proposição 12

Seja (X, d) métrico. Então (X, d) é compacto se, e somente se, é sequencialmente compacto.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Basta usar a Proposição 10.

$(\Leftarrow)$Suponha que não. Seja $\mathcal{C}$ cobertura sem subcobertura finita. Seja $r > 0$ dado pelo resultado anterior. Seja $x_0 \in X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$x_n \in X \setminus \left(B_r\left(x_0\right) \cup \cdots \cup B_r\left(x_{n-1}\right)\right)$$

Note que sempre podemos tomar tal x_n pois, para cada $i = 0, \ldots, n-1$, existe $C_i \in \mathcal{C}$ tal que $B_r\left(x_i\right) \subset C_i$ e $\bigcup_{i=0}^{n} C_i \neq X$ por ser um subconjunto finito de $\mathcal{C}$.

Note que (x_n) não admite subsequência convergente pois $d\left(x_n, x_m\right) \geq r$ para todo $m \neq n$ e, portanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não tem subsequências de Cauchy. Contradição!

Juntando os resultados anteriores, temos.

Corolário 13

Seja (X, d) espaço métrico. São equivalentes:

(a) *(X, d) é compacto;*

(b) *Todo subconjunto infinito de X admite ponto de acumulação em X;*

(c) *Toda sequência de pontos de X admite subsequência convergente.*

Com essa caracterização, fica imediata a prova do seguinte.

Corolário 14

Todo métrico compacto é completo.

Demonstração. Basta usar: se uma sequência (x_n) de Cauchy tem subsequência convergente então a sequência (x_n) é convergente.

No caso de $\mathbb{R}^n$, os compactos são exatamente os subespaços fechados e limitados (ver Exercício).

Para podermos fazer o resultado análogo para outros espaços métricos, precisamos de um outro conceito.

Definição 15

Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que $A \subset X$ é ***totalmente limitado*** *se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $F \subset A$ finito tal que*

$$\bigcup_{x \in F} B_\varepsilon(x) \supset A$$

Lema 16

Seja (X, d) espaço métrico totalmente limitado. Se $Y \subset X$, então Y é totalmente limitado.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Como X é totalmente limitado, existe $F \subset X$ finito tal que $X = \bigcup_{x \in F} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Para cada $x \in F$, se $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap Y \neq \emptyset$, fixe $y_x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap Y$. Considere F' o conjunto de tais y_x 's. Note que $F' \subset Y$ é finito. Vamos mostrar que $Y \subset \bigcup_{y \in F'} B_{\varepsilon}(y)$. Seja $a \in Y$. Como $Y \subset X$, existe $x \in F$ tal que $a \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap Y$. Assim, existe $y_x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap Y$. Note que $a \in B_{\varepsilon}(y_x)$.

Proposição 17

Seja (X, d) espaço métrico. Então (X, d) é compacto se, e somente se, (X, d) é completo e totalmente limitado.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponha (X, d) compacto. Já temos que (X, d) é completo, pelo Corolário 14. O totalmente limitado segue diretamente do fato que cada $B_\varepsilon(x)$ é um aberto.

$(\Leftarrow)$ Agora suponha (X, d) completo e totalmente limitado. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de X. Pelo Corolário 13, basta mostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite subsequência convergente.

Se $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é finito, existe $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsequência convergente.

Vamos supor então que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é infinito.

Como X é totalmente limitado, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ também é.

Considere $\varepsilon_1 = 1$ e $F_1 \subset \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ finito tal que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \bigcup_{x \in F_1} B_{\varepsilon_1}(x)$.

Note que, para algum $x_{n_1} \in F_1$, $B_{\varepsilon_1}(x_{n_1}) \cap \{x_n : n > n_1\} := G_1$ é infinito.

Continuamos este processo, para cada $k+1$, tomando $\varepsilon_{k+1} = \frac{1}{k+1}$, escolhendo $F_{k+1} \subset G_k$ finito de forma que $G_k \subset \bigcup_{x \in F_{k+1}} B_{\varepsilon_{k+1}}(x)$.

Daí escolhemos $x_{n_{k+1}} \in F_{k+1}$ de forma que $B_{\varepsilon_{k+1}}\left(x_{n_{k+1}}\right) \cap \{x_n : n > n_{k+1}\} := G_{k+1}$ seja infinito. Note que a sequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy $(d(x_{n_k}, x_{n_{k+m}}) \leq \frac{1}{k})$ e, portanto, convergente.

Corolário 18

Seja (X, d) espaço métrico completo. Então $A \subset X$ é compacto se, e somente se A é fechado e totalmente limitado.

$(\Rightarrow)$ Como X é Hausdorff e A é compacto, temos que A é fechado (Proposição 11 da Aula 15). Também é totalmente limitado pela proposição anterior.

$(\Leftarrow)$ (A, d) será completo e totalmente limitado, e portanto compacto pela proposição anterior.

O totalmente limitado é necessário de fato.

Exemplo 19

Considere $\mathbb{N}$ *com a métrica discreta. Note que, com tal métrica,* $\mathbb{N}$ *é completo. Note também que* $\mathbb{N}$ *é limitado (basta, por exemplo, tomar a bola* $B_2(0)$*).*

Exercícios - Algumas caracterizações de compactos

1. Mostre que $\mathbb{N}$ como subespaço de $\mathbb{R}$ tem pontos aderentes mas não pontos de acumulação.
2. Mostre que em $A \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, é um fechado limitado.
3. Mostre que $D \subset X$ é fechado e discreto se, e somente se, D não admite pontos de acumulação.
4. Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura aberta para um espaço métrico X. Dizemos que ε é um número de Lebesgue para $\mathcal{C}$ se, para todo conjunto $A \subset X$ com diâmetro menor que ε, temos que existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $A \subset C$. Mostre que se X é um espaço compacto, então toda cobertura admite um número de Lebesgue.
5. Mostre que em todo espaço métrico X onde toda cobertura tem um número de Lebesgue (em particular, compactos), então toda função contínua $f : X \to Y$ é uniformemente contínua - isto é :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \quad \forall a, b \in X \quad d(a,b) < \delta \Rightarrow d'(f(a), f(b)) < \varepsilon,$$

onde d e d' são as métricas de X e Y respectivamente.

Vamos apresentar algumas aplicações de compacidade quando temos o espaço dos reais envolvido. Em geral, a única coisa envolvida é alguma caracterização de compacidade que vale nos reais.

Começamos com uma que segue diretamente dos compactos de $\mathbb{R}$ serem fechados limitados.

Proposição 20

Seja $f : K \to \mathbb{R}$ contínua, onde K é um espaço compacto. Então f atinge seu máximo e mínimo (isto é, existem $a, b \in K$ tais que, para qualquer $x \in K, f(a) \leq f(x) \leq f(b)$).

Demonstração. Como K é compacto, temos que $f(K)$ é compacto. Logo, é fechado e limitado e, portanto, podemos tomar seu máximo e seu mínimo.

A caracterização de compacidade em termos de sequências, mais a caracterização de compactos em termos de fechados limitados nos dão o seguinte resultado.

Proposição 21 (Bolzano-Weierstrass)

Dada (x_n) sequência limitada de pontos em $\mathbb{R}^n$, ela admite subsequência convergente.

Demonstração. Como a sequência é limitada, seu fecho é limitado. Logo, compacto (por estarmos em $\mathbb{R}^n$). Assim, segue o resultado pela caracterização de compacidade em termos de ser sequencialmente compacto.

Dizemos que duas normas (sobre um espaço vetorial) são equivalentes se as topologias induzidas por elas são a mesma (lembre uma uma norma induz uma métrica que por sua vez induz uma topologia).

Sobre $\mathbb{R}^n$, do ponto de vista topológico, não faz muita diferença qual a norma que se adota.

Teorema 22

Todas as normas sobre $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.

Demonstração. Vamos apresentar a prova para o caso $n = 2$, os outros ficam como exercício. Primeiramente, considere a norma $\| \cdot \|_\infty$ dada por

$$\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$$

Fixe $\| \cdot \|$ um norma qualquer. Vamos mostrar que $\| \cdot \|$ é uma função contínua em $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_\infty)$.

De fato, seja $\varepsilon > 0$. Considere

$$K = \max\{\|(1,0)\|, \|(0,1)\|.\}$$

Seja $\delta = \frac{\varepsilon}{2K}$. Assim, se $\|(x,y)-(a,b)\|_\infty < \delta$, temos

$$\begin{aligned}
\|(x,y)-(a,b)\| &= \|(x-a,0)+(0,y-b)\| \\
&\leq \|(x-a,0)\| + \|(0,y-b)\| \\
&= |x-a|\|(1,0)\| + |y-b|\|(0,1)\| \\
&\leq K(|x-a|+|y-b|) \\
&= 2K\|(x,y)-(a,b)\|_\infty \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Considere $U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\|_\infty = 1\right\}$.

Note que tal conjunto é compacto (com relação à $\|\cdot\|_\infty$ - um jeito de mostrar é notando que a $\|\cdot\|_\infty$ induz a topologia produto; união de 4 compactos).

Assim, existem m e M valores mínimo e máximo respectivamente para $\|\cdot\|$ calculada em U. Assim, dado $(x, y) \in U$, temos

$$m \leq \|(x, y)\| \leq M$$

Lembrando que, dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ não nulo, $\frac{1}{\|(x,y)\|_\infty}(x, y) \in U$. Assim, obtemos que

$$m\|(x, y)\|_1 \leq \|(x, y)\| \leq M\|(x, y)\|_1$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas sobre um mesmo espaço. Mostre que são equivalentes:
   (a) $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são equivalentes;
   (b) existem $m, M > 0$ tais que, para todo x vale
   $$m\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq M\|v\|_1$$
2. Vimos que se $K \subset \mathbb{R}$ é compacto, então toda função contínua $f : K \to \mathbb{R}$ tem imagem limitada. Mostre que para subespaços de $\mathbb{R}$, vale a volta. Isto é, se $K \subset \mathbb{R}$ é tal que toda função contínua é limitada, então K é compacto.

Vamos apresentar uma aplicação do Teorema de Tychonoff. Considere

$$S = \left\{ (x_z)_{z\in\mathbb{Z}} : \exists L > 0 - L < x_z < L \text{ para todo } z \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Note que S é um espaço vetorial. Vamos dizer que uma função linear $\mu : S \to \mathbb{R}$ é uma média se, para todo $(x_z)_{z\in Z} \in S$

$$\inf_{z\in\mathbb{Z}} x_z \leq \mu\left((x_z)_{z\in\mathbb{Z}}\right) \leq \sup_{z\in\mathbb{Z}} x_z.$$

3. Note que as próprias funções inf e sup não são médias.
4. Note que uma função constante não é uma média.
5. Seja $F \subset \mathbb{Z}$ finito e não vazio. Mostre que μ_F dada por

$$\mu_F = \frac{1}{|F|} \sum_{z\in F} x_z$$

é uma média.

6. Seja $(a_z)_{z\in\mathbb{Z}} \in S$ tal que $a_z \geq 0$ para cada z e $\sum_{z\in\mathbb{Z}} a_z = 1$. Mostre que μ dada por

$$\mu\left((x_z)_{z\in\mathbb{Z}}\right) = \sum_{z\in\mathbb{Z}} a_z x_z$$

também é uma média.

O problema com os tipos de médias apresentados acima é que se "deslocamos" a sequência, sua média muda.

Para formalizar, considere o seguinte operador shift: dado $(x_z)_{z\in Z} \in S$, denotamos por $s\left((x_z)_{z\in Z}\right) = (x_{z+1})_{z\in Z}$. Note que enquanto inf e sup são invariantes quanto a aplicações de s, os exemplos acima não são.

Nosso trabalho agora se resume a provar que existe uma média invariante por s. Começamos com uma aproximação.

7. Mostre que existe uma sequência $(\mu_n)_{n\in N}$ de médias tal que, para qualquer $x \in \mathbb{Z} \in S$, temos

$$\lim_{n\to\infty} |\mu_n(s(x)) - \mu_n(x)| = 0$$

Podemos considerar o conjunto $\mathcal{M}$ de todas as médias como um subconjunto de $\prod_{s\in S}\mathbb{R}$ simplesmente tomando μ como $(\mu(s))_{s\in S}$. Desta forma, podemos ainda melhorar e tomar o conjunto $\mathcal{M}$ como sendo um subconjunto de

$$\prod_{s\in S}[m(s), M(s)]$$

onde $m(s)$ é o ínfimo de s e M é o supremo de s. Desta forma, pelo Teorema de Tychonoff, temos que $\mathcal{M}$ é um subconjunto de um espaço compacto.

8. Se convença das afirmações acima.
9. Mostre que o conjunto $\mathcal{M}$ de todas as médias é fechado no espaço descrito acima e, portanto, é compacto.
10. Considere $(\mu_n)_{n\in N}$ sequência como no Exercício acima.
    (a) Mostre que $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um ponto de acumulação em $\mathcal{M}$.
    (b) Mostre que tal ponto de acumulação é uma média invariante por shifts.