# Aula 16: Compactos II

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

$1^o$ **Semestre de 2023 - Curso de Topologia**

# Na aula passada ...

## Definição 1

*Seja* $(X, \tau)$ *um espaço topológico. Dizemos que* $\mathcal{B}$ *é uma* sub-base *para* $(X, \tau)$ *se* $\{B_1 \cap \cdots \cap B_n : B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N}\}$ *é uma base para* $X$*.*

## Proposição 2 (Lema da sub-base de Alexander)

*Sejam* $(X, \tau)$ *espaço topológico e* $\mathcal{B}$ *uma sub-base para* $X$*. Se toda cobertura para* $X$ *feita por elementos de* $\mathcal{B}$ *admite subcobertura finita, então* $X$ *é compacto.*

**Teorema 3 (de Tychonoff)**

*Seja $((X_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha\in A}$ família de espaços compactos. Então $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ é compacto.*

Demonstração. Pelo Lema da Sub-base, basta mostrar que toda cobertura $\mathcal{C}$ para $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ feita por abertos da forma $\pi_\alpha^{-1}(V)$ onde $V$ é aberto em $X_\alpha$, admite subcobertura finita.

Para cada $\alpha$, seja

$$C_\alpha = \left\{V \in \tau_\alpha : \pi_\alpha^{-1}(V) \in \mathcal{C}\right\}.$$

Vamos mostrar que existe $\alpha \in A$ tal que $C_\alpha$ é uma cobertura para $X_\alpha$.

Suponha que não. Então para cada $\alpha \in A$, existe $x_\alpha \in X_\alpha$ tal que $x_\alpha \notin \bigcup_{V\in C_\alpha} V$. Note que $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \notin \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C$, contradição.

Seja $\beta \in A$ tal que $C_\beta$ é cobertura para $X_\beta$. Como $X_\beta$ é compacto, existem $V_1, \dots, V_n \in C_\beta$ tais que $X_\beta = \bigcup_{i=1}^n V_i$.

Note que $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha = \bigcup_{i=1}^n \pi_\beta^{-1}(V_i)$. Como cada $\pi_\beta^{-1}(V_i) \in \mathcal{C}$, obtemos o resultado.

**Proposição 4**

*Seja $(X, \tau)$ um espaço compacto de Hausdorff. Seja, também, $\sigma \supsetneq \tau$ uma topologia sobre $X$. Então, $(X, \sigma)$ não é compacto.*

Demonstração. Seja $A \in \sigma \backslash \tau$. Então, $X \backslash A$ não é fechado em $(X, \tau)$. Logo, $X \backslash A$ não é compacto em $(X, \tau)$. Seja $\mathcal{C}$ cobertura aberta (em $\tau$) para $X \backslash A$ que não admite subcobertura finita.

Então, $\mathcal{C} \cup \{A\}$ é uma cobertura (em $\sigma$ ) sem subcobertura finita. Logo, $(X, \sigma)$ não é compacto.

Caracterização da Topologia produto - via compactos

### Teorema 5

*A topologia produto é a única que faz com que as projeções sejam contínuas e o produto de compactos de Hausdorff seja compacto.*

Demonstração. Lembrar da Proposição 22 da Aula 11 - produto de Hausdorff é Hausdorff; Lembrar do Teorema de Tychonoff - produto de compactos é compacto.

Seja $\tau$ a topologia produto e $\sigma$ uma topologia satisfazendo o enunciado. Pela definição de $\tau$, se $\sigma$ é tal que as projeções são contínuas, então $\tau \subset \sigma$. Por outro lado, se $\tau \subsetneq \sigma$, pelo resultado anterior, o produto não é compacto. Logo, $\tau = \sigma$.

Também conseguimos uma caracterização para os espaços completamente regulares.

**Proposição 6**

*Seja $(X, \tau)$ um espaço topológico. Então $(X, \tau)$ é completamente regular se, e somente se, existe $(Y, \sigma)$ compacto de Hausdorff tal que $X \subset Y$.*

Demonstração. Se existe tal $Y$, então $Y$ é normal (Proposição 14 da Aula 15) e, portanto, $X$ é completamente regular (subespaço de Normal é Normal + Lema de Urysohn).

Por outro lado, se $X$ é completamente regular, temos que $X$ é homeomorfo a um subespaço de $\prod_{\alpha \in A}[0,1]$ (Corolário 13 da Aula 12) que é compacto.

# Exercícios - Teorema de Tychonoff

1. Mostre a volta do Teorema de Tychonoff: Se $\prod_{\alpha X_\alpha} X_\alpha \neq \emptyset$ é compacto, então cada $X_\alpha$ é compacto.
2. Seja $((X_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in A}$ uma familia de espaços topológicos. Chamamos de topologia da caixa a topologia gerada pelos conjuntos da forma $\prod_{\alpha \in A} V_\alpha$ onde cada $V_\alpha$ é aberto em $X_\alpha$.
   (a) Mostre que a topologia da caixa contém a topologia produto.
   (b) Considere $\{0,1\}$ com a topologia discreta. Note que $\prod_{n \in \mathbb{N}} \{0,1\}$ é compacto com a topologia produto. Mostre que $\prod_{n \in \mathbb{N}} \{0,1\}$ é discreto (e infinito) com a topologia da caixa (e, portanto, não é compacto).
3. Considere $\mathbb{R}_S$ a reta de Sorgenfrey.
   (a) Note que $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ é completamente regular mas não é normal.
   (b) Mostre que existe $K$ compacto de Hausdorff tal que $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S \subset K$.
   (c) Conclua que nem todo subespaço de espaço normal é normal.
   (d) Generalize o resultado anterior: Todo espaço completamente regular que não é normal gera um exemplo de espaço normal com um subespaço não normal.

Será apresentada a seguir uma demonstração alternativa para o Teorema de Tychonoff. O roteiro dela é o seguinte: caracterizamos a compacidade em termos de ultrafiltros e depois provamos a caracterização no produto, usando que ela vale em cada coordenada.

Definição 7

*Seja $X$ um conjunto. Dizemos que $F \subset \wp(X)$ é um filtro sobre $X$ se*

(a) $\emptyset \notin F$ *(condição de não trivialidade);*

(b) *se* $a, b \in F$, *então* $a \cap b \in F$;

(c) *se* $a \in F$ *e* $b \supset a$, *então* $b \in F$.

*Dizemos que $F$ é um ultrafiltro se $F$ é maximal (i.e., se $G \supset F$ é um filtro, então $G = F$).*

4. Sejam $(X, \tau)$ um espaço topológico e $x \in X$. Mostre que $F = \{A \subset X : A \text{ é vizinhança de } x\}$ é um filtro sobre $x$.
5. Seja $X$ um conjunto e $x \in X$. Mostre que $F = \{A \subset X : x \in A\}$ é um ultrafiltro.

6. Sejam $X \neq \emptyset$ e $F \subset \wp(X)$ com a propriedade da intersecção finita. Mostre que

$$F' = \left\{ A \subset X : \exists B_1, \ldots, B_n \in F, \bigcap_{i=1}^{n} B_i \subset A \right\}$$

é um filtro sobre $X$ (o chamamos de filtro gerado por $F$ ).

7. Seja $F$ um ultrafiltro e seja $Y \notin F$. Mostre que existe $A \in F$ tal que $A \cap Y = \emptyset$.

8. Sejam $X$ um conjunto não vazio e $F$ um filtro sobre $X$. Mostre que são equivalentes:
   (i) F é ultrafiltro;
   (ii) para todo $Y \subset X$, temos que $Y \in F$ ou $X \backslash Y \in F$.

9. Seja $(X, \tau)$ infinito. Considere $\mathcal{F} = \{F \subset X : X \backslash F \text{ é finito }\}$
   (a) Mostre que $\mathcal{F}$ satisfaz a p.i.f.
   (b) Mostre que qualquer $G \subset \mathcal{F}$ ultrafiltro não é da forma $\{A \subset X : x \in A\}$ para algum $x \in X$. Note que, de fato, existe algum $G \supset \mathcal{F}$ ultrafiltro.

10. Sejam $X$ um conjunto não vazio e $\mathcal{F}$ uma cadeia de subconjuntos de $X$, cada um deles com a propriedade da intersecção finita. Então, $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F$ tem a propriedade da intersecção finita. ( $\mathcal{F}$ é uma cadeia se para todo $A, B \in \mathcal{F}$ temos $A \subset B$ ou $B \subset A$.)
11. Sejam $X$ um conjunto não vazio e $F$ um filtro sobre $X$. Então, existe $G \supset F$ que é ultrafiltro sobre $X$.

**Definição 8**

*Sejam $(X, \tau)$ um espaço topológico e $F$ um filtro sobre $X$. Dizemos que $x \in X$ é um ponto aderente a $F$ se, para todo $A \in F$, temos $x \in \bar{A}$*

*Dizemos que $F$ converge para $X$ se, para toda vizinhança de $x$, temos que $V \in F$. (Notação: $F \to x$.*

12. Mostre que se $(X, \tau)$ é de Hausdorff, então cada ultrafiltro sobre $X$ converge para, no máximo, um ponto.
13. Seja $(X, \tau)$ um espaço topológico. Mostre que são equivalentes:
    (i) $(X, \tau)$ é compacto;
    (ii) Todo filtro sobre $X$ tem ponto aderente;
    (iii) Todo ultrafiltro sobre $X$ converge.
14. Seja $\mathcal{F}$ um ultrafiltro sobre $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.
    (a) Mostre que, se $F \in \mathcal{F}$, então $\pi_\alpha^{-1}[\pi_\alpha[F]] \in \mathcal{F}$ para todo $\alpha \in A$.
    (b) Mostre que, para todo $\alpha \in A$, $\{\pi_\alpha[F] : F \in \mathcal{F}\}$ é ultrafiltro sobre $X_\alpha$.
15. (Teorema de Tychonoff). Seja $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família de espaços topológicos compactos. Então, $X = \prod X_\alpha$ é compacto.

Vamos gora trabalhar com um conceito que é usado muitas vezes com a compacidade.

### Definição 9

*Seja $(X, \tau)$ um espaço topológico. Dizemos que $x \in X$ é um ponto de acumulação de $A \subset X$ se $x \in \overline{A \backslash \{x\}}$.*

Note que se $x$ é ponto de acumulação de $A$, então $x \in \bar{A}$. Mas não necessariamente vale a volta (ver exercício).

### Proposição 10

*Seja $(X, \tau)$ espaço $T_1$. Então $x \in X$ é ponto de acumulação de $A \subset X$ se, e somente se, para todo $V$ aberto tal que $x \in V$ temos que $V \cap A$ é infinito.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Seja $V$ aberto tal que $x \in V$. Suponha $V \cap A$ finito. Então $V' = V \backslash (A \backslash \{x\})$ é um aberto (usamos aqui $T_1$) tal que $x \in V'$ e $V' \cap A \subset \{x\}$ e, portanto, $x$ não é ponto de acumulação.

$(\Leftarrow)$Por outro lado, se para todo $V$ aberto tal que $x \in V$ temos que $V \cap A$ é infinito, então $V \cap (A \backslash \{x\}) \neq \emptyset$ e, portanto, $x$ é ponto de acumulação de A.

A compacidade implica na existência de pontos de acumulação para conjuntos infinitos.

**Proposição 11**

*Seja $(X, \tau)$ compacto. Então todo suconjunto infinito admite ponto de acumulação.*

Demonstração. Seja $A \subset X$ um conjunto infinito. Suponha que todo $x \in X$ não é ponto de acumulação de $A$. Assim, para todo $x \in X$, existe $V_x$ aberto tal que $x \in V_x$ e $V_x \cap A \subset \{x\}$. Note que isso dá uma cobertura aberta para $X$ e, portanto, tem subcobertura finita. Assim, existem $x_1, \ldots, x_n \in X$ tais que $X \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. Em particular, $A \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. Mas note que isso implica que $A \subset \{x_1, \ldots, x_n\}$, contradição com a infinitude de $A$.