

# Aula 15: Compactos

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

**1º Semestre de 2023 - Curso de Topologia**

## Definição 1

Seja  $(X, \tau)$  um espaço topológico. Dizemos que  $\mathcal{A}$  é uma *cobertura* (ou recobrimento) de  $X$  se  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X$ . Neste caso, chamamos  $\mathcal{A}$  de *cobertura aberta* se os elementos de  $\mathcal{A}$  são abertos.

## Definição 2

Dizemos que o espaço topológico  $(X, \tau)$  é um *espaço compacto* se para toda cobertura aberta  $\mathcal{A}$  de  $X$  existe uma subcobertura  $\mathcal{A}'$  (i.e.,  $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$  e  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}'} A = X$ ) finita.

## Exemplo 3

*Qualquer espaço finito é compacto.*

Vamos apresentar agora um conceito que vai nos ajudar a mostrar que certos espaços são compactos.

## Definição 4

Seja  $(X, \tau)$  um espaço topológico. Dizemos que  $\mathcal{B}$  é uma **sub-base** para  $(X, \tau)$  se  $\{B_1 \cap \cdots \cap B_n : B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N}\}$  é uma base para  $X$ .

# Um pouco sobre teoria de conjuntos

## Relação de ordem

Seja  $X$  um conjunto não-vazio. Uma **relação de ordem parcial em  $X$**  é uma relação  $\leq$  com as seguintes propriedades:

(Reflexiva)  $x \leq x$  para todo  $x \in X$

(Transitiva) Se  $x \leq y$  e  $y \leq z$ , então  $x \leq z$

(Antissimétrica) Se  $x \leq y$  e  $y \leq x$ , então  $x = y$

Se além disso

(Total)  $x \leq y$  ou  $y \leq x$  para quaisquer  $x, y \in X$

então  $\leq$  é dita uma **relação de ordem total** e  $X$  é dito **totalmente ordenado**.

## Definição 5

- ▶ Se  $X$  é parcialmente ordenado por  $\leq$ , um elemento  $x \in X$  é dito *maximal (minimal)* se, e só se,  $x \leq y$  ( $y \leq x$ ) implica  $x = y$ .
- ▶ Se  $A \subset X$ , então um elemento  $x \in X$  é dito *limitante superior (inferior)* para  $A$  se, e só se,  $a \leq x$  ( $x \leq a$ ) para todo  $a \in A$ .

## Lema de Zorn

Se  $X$  é um conjunto parcialmente ordenado e todo subconjunto totalmente ordenado de  $X$  tem um limitante superior, então  $X$  tem um elemento maximal.

O próximo resultado é útil para mostrar que certos espaços são compactos e será bastante útil na prova do Teorema de Tychonoff (produtos de compacto é compacto).

## Proposição 6 (Lema da sub-base de Alexander)

Sejam  $(X, \tau)$  espaço topológico e  $\mathcal{B}$  uma sub-base para  $X$ . Se toda cobertura para  $X$  feita por elementos de  $\mathcal{B}$  admite subcobertura finita, então  $X$  é compacto.

Demonstração. Suponha que  $X$  não seja compacto.

Considere  $\mathcal{C}$  a família de todas as coberturas abertas para  $X$  que não possuam subcobertura finita e, sobre  $\mathcal{C}$ , a relação de ordem dada pela inclusão

$$C_1 \leq C_2 \quad \text{se "A} \in C_1 \text{ implica A} \in C_2\text{"}.$$

Note que, se  $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$  é um subconjunto totalmente ordenado, então  $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S \in \mathcal{C}$  (ver exercício) é um limitante superior para  $\mathcal{S}$ .

Desta forma, pelo Lema de Zorn, podemos tomar  $C \in \mathcal{C}$  elemento maximal.

Por hipótese, temos que  $C \cap \mathcal{B}$  não é uma cobertura (pois  $C$  não admite subcobertura finita).

## Compactos - Definição e propriedades básicas

Então existe  $x \in X$  tal que  $x \notin B$  para todo  $B \in C \cap \mathcal{B}$ .

Mas, como  $C$  é cobertura, existe  $A \in C$  tal que  $x \in A$ .

Como  $\mathcal{B}$  é sub-base, existem  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$  tais que

$$x \in B_1 \cap \dots \cap B_n \subset A.$$

Como  $x$  não é coberto por  $C \cap \mathcal{B}$ , temos que cada  $B_i \notin C \cap \mathcal{B}$ . Ou seja, cada  $B_i \notin C$ .

Pela maximalidade de  $C$ , temos que, para cada  $i = 1, \dots, n$ ,  $C \cup \{B_i\}$  admite subcobertura finita, digamos  $\{B_i\} \cup C_i$ , onde  $C_i \subset C$  é finito.

Vamos mostrar que  $\{A\} \cup C_1 \cup \dots \cup C_n$  é uma cobertura para  $X$  (o que é uma contradição, já que tal família seria uma subcobertura finita de  $C$ ).

De fato, seja  $y \in X$ . Se  $y \in A$ , nada temos que mostrar. Mas, se  $y \notin A$ , então existe  $j$  tal que  $y \notin B_j$  (pois  $\bigcap_{i=1}^n B_i \subset A$ ). Como  $\{B_j\} \cup C_j$  é cobertura, algum aberto de  $C_j$  contém  $y$ .

# Compactos - Definição e propriedades básicas

Com o Lema da sub-base, podemos provar de maneira fácil o seguinte resultado.

## Proposição 7

*O intervalo  $[0, 1]$  com a topologia usual é compacto.*

Demonstração. Note que  $\mathcal{B} = \{[0, b) : b \in (0, 1]\} \cup \{(a, 1] : a \in [0, 1)\}$  é uma sub-base para  $[0, 1]$ . Seja  $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$  uma cobertura para  $[0, 1]$ . Seja

$$\beta = \sup\{b \in [0, 1] : [0, b) \in \mathcal{C}\}.$$

Note que o próprio  $\beta$  não é coberto por algum conjunto da forma  $[0, b) \in \mathcal{C}$ .

Assim, existe  $a$  tal que  $(a, 1] \in \mathcal{C}$  e  $\beta \in (a, 1]$ .

Seja  $b$  tal que  $a < b < \beta$  e tal que  $[0, b) \in \mathcal{C}$  (existe por  $\beta$  ser supremo).

Note que  $[0, b) \cup (a, 1] = [0, 1]$ .

Ao contrário do intervalo  $[0, 1]$  ser compacto, a reta toda não é.

## Exemplo 8

*Com a topologia usual,  $\mathbb{R}$  não é compacto.*

*Para ver isso basta tomar a cobertura  $\{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ .*

# Compactos - Definição e propriedades básicas

Como verificar a compacidade pela definição muitas vezes é trabalhoso, o seguinte resultado é bem prático.

## Proposição 9

*Seja  $(X, \tau)$  espaço compacto e seja  $F \subset X$  fechado. Então  $F$  é compacto.*

Demonstração. Seja  $\mathcal{A}$  uma cobertura aberta para  $F$  e, para cada  $A \in \mathcal{A}$ , seja  $A^*$  aberto em  $X$  tal que  $A^* \cap F = A$ . Seja  $\mathcal{A}^* = \{A^* : A \in \mathcal{A}\}$ . Note que  $\mathcal{A}^* \cup \{X \setminus F\}$  é uma cobertura aberta para  $X$ . Como  $X$  é compacto, tal cobertura admite subcobertura finita  $\mathcal{B}$ . Note, então que

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{B \cap F : B \in \mathcal{B} \setminus \{X \setminus F\}\} \subset \mathcal{A}$$

é uma subcobertura finita de  $F$ .

# Compactos - Definição e propriedades básicas

Vamos provar que se um espaço é de Hausdorff, então ele separa pontos de compactos (isto será melhorado - separar compactos).

## Proposição 10

Seja  $(X, \tau)$  um espaço de Hausdorff. Sejam  $x \in X$  e  $K \subset X$  compacto tal que  $x \notin K$ . Então existem  $A$  e  $B$  abertos tais que  $x \in A$ ,  $K \subset B$  e  $A \cap B = \emptyset$ .

Demonstração. Para cada  $y \in K$ , sejam  $A_y$  e  $B_y$  abertos tais que  $x \in A_y$ ,  $y \in B_y$  e  $A_y \cap B_y = \emptyset$ . Como  $K$  é compacto, existem  $y_1, \dots, y_n \in K$  tais que  $\bigcup_{i=1}^n B_{y_i} \supset K$ . Agora, sejam

$$A = \bigcap_{i=1}^n A_{y_i} \quad \text{e} \quad B = \bigcup_{i=1}^n B_{y_i}.$$

Note que ambos são abertos,  $x \in A$  e  $F \subset B$ .

Vamos mostrar que  $A \cap B = \emptyset$ .

Suponha, por contradição, que  $z \in A \cap B$ . Seja  $i$  tal que  $z \in B_{y_i}$ . Note que, assim,  $z \in A_{y_i}$ , que é contradição com o fato que  $A_{y_i} \cap B_{y_i} = \emptyset$ .

Em espaços de Hausdorff, os compactos são fechados.

## Proposição 11

*Sejam  $(X, \tau)$  espaço de Hausdorff e  $F \subset X$  compacto. Então  $F$  é fechado.*

Demonstração. Pelo resultado anterior, temos em particular que se  $x \notin F$ , existe  $A$  aberto tal que  $x \in A \subset X \setminus F$ .

## Corolário 12

*Sejam  $(X, \tau)$  um espaço compacto de Hausdorff e  $F \subset X$  um conjunto. Então,  $F$  é fechado se, e somente se,  $F$  é compacto.*

Em espaços de Hausdorff compactos disjuntos podem ser separados por abertos.

## Proposição 13

*Seja  $(X, \tau)$  espaço Hausdorff. Sejam  $F, G \subset X$  compactos disjuntos. Então existem  $A, B$  abertos disjuntos tais que  $F \subset A$  e  $G \subset B$*

Demonstração. Sejam  $F, G \subset X$  compactos disjuntos. Pela Proposição 10, para cada  $y \in G$ , existem  $A_y, B_y$  abertos tais que  $A_y \supset F, y \in B_y$  e  $A_y \cap B_y = \emptyset$ . Como  $G$  é compacto, existem  $y_1, y_2, \dots, y_n \in G$  tais que  $\bigcup_{i=1}^n B_{y_i} \supset G$ . Sejam

$$A = \bigcap_{i=1}^n A_{y_i} \quad \text{e} \quad B = \bigcup_{i=1}^n B_{y_i}.$$

Note que  $A$  e  $B$  são abertos,  $F \subset A, G \subset B$  e  $A \cap B = \emptyset$ .

# Compactos - Definição e propriedades básicas

Com isso, temos que em espaços compactos, basta a propriedade de Hausdorff para termos a normalidade.

Lembrar: Normal =  $T_1 + T_4$  e  $T_2 \Rightarrow T_1$

## Proposição 14

*Todo espaço compacto de Hausdorff é normal.*

Demonstração. Basta notar que fechados são compactos e aplicar a Proposição 13.

Outro resultado importante sobre a compacidade é que ela é preservada pela continuidade.

## Proposição 15

*Sejam  $(X, \tau), (Y, \sigma)$  espaços topológicos onde  $X$  é compacto e  $f : X \rightarrow Y$  uma função contínua e sobrejetora. Então  $Y$  é compacto.*

Demonstração. Seja  $\mathcal{A}$  uma cobertura aberta para  $Y$ . Note que  $\mathcal{B} = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\}$  é uma cobertura aberta para  $X$ . Então, existe  $\mathcal{B}'$  subcobertura finita. Assim, se para cada  $B \in \mathcal{B}'$  tomamos  $A_B \in \mathcal{A}$  tal que  $B = f^{-1}(A_B)$ , temos que  $\{A_B \in \mathcal{A} : B \in \mathcal{B}'\}$  é uma subcobertura finita para  $Y$ . De fato:

$$Y = f(X) = f\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B\right) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} f(B) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} A_B.$$

## Corolário 16

*Sejam  $(X, \tau)$  e  $(Y, \sigma)$  espaços topológicos, sendo  $Y$  espaço de Hausdorff, e seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função contínua. Se  $F \subset X$  é compacto, então  $f(F)$  é compacto e, portanto, fechado.*

Demonstração. A compacidade segue da Proposição anterior (não precisa da hipótese  $Y$  ser Hausdorff) e o fato de ser fechado da Proposição 11.

## Corolário 17

*Sejam  $(X, \tau)$  e  $(Y, \sigma)$  espaços de Hausdorff, sendo  $X$  compacto, e seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função contínua e bijetora. Então,  $f$  é um homeomorfismo.*

Demonstração. Basta usar o resultado que se imagem inversa de fechado é fechado, então a função é contínua.

## Definição 18

Dizemos que o espaço topológico  $(X, \tau)$  é **localmente compacto** se todo  $x \in X$  admite um sistema fundamental de vizinhanças compactas.

Para espaços de Hausdorff, a propriedade global implica na local.

Lembrar: Regular =  $T_1 + T_3$

## Proposição 19

Se  $(X, \tau)$  é um espaço compacto de Hausdorff, então  $X$  é localmente compacto.

Demonstração. Note que  $X$  é regular (pois é normal pela Proposição 14). Portanto, todo  $x \in X$  admite um sistema fundamental de vizinhanças fechadas (equivalência de  $T_3$ , Corolário 18 da Aula 4), logo, compactas (Proposição 9 de hoje).

Já a propriedade local não implica na global.

## Exemplo 20

*Com a topologia usual,  $\mathbb{R}$  é localmente compacto, pois cada  $[a, b]$  é compacto.*

Vimos que, para espaços de Hausdorff, a compacidade implica na normalidade. Para espaços localmente compactos, conseguimos garantir a propriedade de ser completamente regular.

**Lembrar:** Dizemos que  $(X, \tau)$  é  $T_{3\frac{1}{2}}$  se, para todo  $x \in X$  e  $F \subset X$  fechado tal que  $x \notin F$  existir  $f : X \rightarrow [0, 1]$  contínua, tal que  $f(x) = 0$  e  $f(y) = 1$ , para todo  $y \in F$ . No caso que  $(X, \tau)$  também é  $T_1$ , dizemos que  $(X, \tau)$  é um **espaço completamente regular**.

## Proposição 21

Seja  $(X, \tau)$  um espaço localmente compacto de Hausdorff. Então  $(X, \tau)$  é completamente regular.

Demonstração. Sejam  $x \in X$  e  $F \subset X$  fechado tais que  $x \notin F$ . Então  $x \in X \setminus F$ , que é aberto. Logo, existe  $V$  vizinhança compacta de  $x$ , tal que  $V \subset X \setminus F$  (usando compacidade local).

Seja  $A$  aberto tal que  $x \in A \subset V$ . Note que  $V \setminus A$  é fechado (em  $V$ ). Como  $V$  é compacto e Hausdorff,  $V$  é completamente regular (ele é normal pela Proposição 14, todo normal é completamente regular por Urysohn). Então existe  $g : V \rightarrow [0, 1]$  contínua tal que  $g(x) = 0$  e  $g(V \setminus A) = \{1\}$ . Defina  $f : X \rightarrow [0, 1]$  como

$$f(a) = \begin{cases} g(a), & a \in V \\ 1, & a \notin V \end{cases}$$

Note que  $f$  é a função desejada (exercício a seguir).

# Compactos - Exercícios

1. Mostre que se  $\mathcal{S}$  é uma cadeia de coberturas para um espaço, cada uma delas sem subcobertura finita, então  $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$  também é uma cobertura sem subcobertura finita.
2. Mostre, sem usar o Lema da Sub-base, que a seguinte afirmação é equivalente a ser compacto: “toda cobertura formada por abertos básicos admite subcobertura finita”.
3. Seja  $(X, \tau)$  um espaço topológico. Seja  $\mathcal{B}$  uma base para  $(X, \tau)$ . Mostre que  $\mathcal{B}$  é um recobrimento aberto para  $(X, \tau)$ .
4. Mostre que a reta de Sorgenfrey não é compacta.
5. Caracterize os compactos discretos.
6. Dizemos que uma família de subconjuntos  $\mathcal{F}$  satisfaz a propriedade da intersecção finita (p.i.f.) se, para todo  $F \subset \mathcal{F}$  finito, temos que  $\bigcap_{G \in F} G \neq \emptyset$ . Seja  $(X, \tau)$  espaço topológico. Mostre que “ $X$  ser compacto” é equivalente a “toda  $\mathcal{F}$  família de fechados de  $X$  com p.i.f., é tal que  $\bigcap_{G \in \mathcal{F}} G \neq \emptyset$ ”.
7. Mostre que a função  $f$  da Proposição 21 é a função desejada.
8. Mostre que compacidade é um invariante topológico (isto é, é preservada via homeomorfismos).

9. Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$ . Mostre que  $[a, b]$  é compacto (na topologia usual).
10. Seja  $(X, \tau)$  espaço de Hausdorff. Mostre que  $(X, \tau)$  é localmente compacto se, e somente se, para todo  $x \in X$  existe  $V$  aberto tal que  $x \in V$  e  $\bar{V}$  é compacto.
11. Este é um roteiro para mostrar diretamente que  $[0, 1]$  é compacto (sem usar o Lema da sub-base). Considere  $\mathcal{A}$  uma cobertura feita por abertos básicos. Considere

$$C = \left\{ x \in [0, 1] : \exists \mathcal{A}' \subset \mathcal{A} \text{ finito, com } \bigcup_{A \in \mathcal{A}'} A \supset [0, x] \right\}$$

- (a) Mostre que existe  $\alpha = \sup C$ .
- (b) Mostre que  $\alpha = 1$ .
- (c) Encontre a subcobertura finita.
12. Mostre que  $[0, 1]$  não é homeomorfo a  $\mathbb{R}$ .
13. Seja  $(X, d)$  espaço métrico. Mostre que se  $F \subset X$  é compacto, então  $F$  é fechado e limitado (um conjunto  $A$  é dito limitado se existe  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  tal que  $A \subset B_r(x)$  para algum  $x \in X$ ).
14. Seja  $(X, \tau)$  Hausdorff. Mostre que  $X$  é localmente compacto se, e somente se, para cada  $x \in X$  existe  $\mathcal{V}$  sistema fundamental de vizinhanças para  $x$  tal que  $\bar{V}$  é compacto para cada  $V \in \mathcal{V}$ .

15. Seja  $(X, \tau)$  de Hausdorff. Mostre que  $X$  é localmente compacto se, para todo  $x \in X$  existe  $K$  vizinhança compacta de  $x$ .
16. Mostre que a reta de Sorgenfrey não é localmente compacta.
17. Seja  $(X, \tau)$  espaço de Hausdorff. Dizemos que  $(Y, \sigma)$  espaço de Hausdorff é uma compactificação de  $X$  se  $X$  é um subespaço denso de  $Y$  e  $(Y, \sigma)$  é compacto. Dizemos que uma compactificação  $(Y, \sigma)$  é uma compactificação de Alexandroff se  $Y = X \cup \{x\}$  onde  $x \notin X$ .
  - (a) Seja  $(X, \tau)$  espaço topológico de Hausdorff que admite uma compactificação. Mostre que  $(X, \tau)$  é completamente regular.
  - (b) Considere  $(X, \tau)$  espaço localmente compacto. Defina  $Y = X \cup \{x\}$  onde  $x \notin X$ . Defina  $\sigma$  topologia sobre  $Y$  de forma que  $\tau \subset \sigma$  e todo  $\{x\} \cup (X \setminus K) \in \sigma$  onde  $K \subset X$  é compacto. Mostre que  $(Y, \sigma)$  é uma compactificação de Alexandroff de  $X$ .
  - (c) Seja  $(X, \tau)$  espaço de Hausdorff e suponha que exista  $(Y, \sigma)$  compactificação de Alexandroff para  $X$ . Mostre que  $(X, \tau)$  é localmente compacto.
  - (d) Conclua que um espaço de Hausdorff é localmente compacto se, e somente se, admite uma compactificação de Alexandroff.

18. Considere  $\mathcal{F}$  o conjunto de todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (não necessariamente contínuas). Considere sobre  $\mathcal{F}$  a topologia produto (induzida por  $\prod_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{R}$ ). Chama-se de suporte de uma função  $f$  o conjunto  $\overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$ . Mostre que o conjunto das funções contínuas de suporte compacto é denso em  $\mathcal{F}$ .
19. Sejam  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  espaços métricos, e  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  **localmente Lipschitziana** (i.e., para cada  $x \in X$ , existem  $r_x > 0$  e  $C_x > 0$  tais que  $d_Y(f(a), f(b)) \leq C_x d_X(a, b)$  para quaisquer  $a, b \in B(x, r_x)$ ). Dado  $K \subset X$  compacto, mostre que existe  $\delta > 0$  tal que  $f|_{K_\delta}$  é Lipschitziana. Aqui

$$K_\delta = \{x \in X : d_X(x, K) < \delta\}.$$