Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos
7600023 - Termodinâmica e Física Estatística - 2023-2

Prof. Leonardo Paulo Maia

Lista 01

1. Calcule a média e a variância das variáveis aleatórias abaixo.

a Poisson, $p_n = \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n/n!$, $n = 0, 1, 2, \cdots$

b geométrica, $p_n = pq^{n-1}$, $q = 1 - p$, $n = 1, 2, \cdots$

c uniforme, $\rho(x) = 1/(b - a)$, $a \le x \le b$

d gama, $\rho(x) = \lambda^p x^{p-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}/\Gamma(p)$, $x \ge 0$, $\Gamma(p) = \int_0^\infty z^{p-1}\mathrm{e}^{-z}\,dz$

2. Verifique a validade das relações fundamentais abaixo. Em todos os casos, c é uma constante real, X uma variável aleatória qualquer, $\langle\cdot\rangle$ indica a média e $\mathrm{var}(\cdot)$ indica a variância.

a $\boxed{\langle cX\rangle = c\langle X\rangle}$

b $\boxed{\langle X + c\rangle = \langle X\rangle + c}$

c $\boxed{\mathrm{var}(X) = \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2}$ (a partir da definição da variância como segundo momento central)

d $\boxed{\mathrm{var}(cX) = c^2\mathrm{var}(X)}$

e $\boxed{\mathrm{var}(X + c) = \mathrm{var}(X)}$

3. A relação entre as leituras C e F de uma mesma temperatura nas escalas Celsius e Fahrenheit, respectivamente, é

$$\frac{C}{5} = \frac{F - 32}{9}.$$

Porém, a temperatura prevista para uma cidade ou região em certo horário nunca deveria ser um número preciso, pois há heterogeneidades na estrutura espacial de qualquer local. Vamos tratar uma previsão de temperatura como uma v.a. de média μ e desvio padrão σ, e definir "faixa de temperatura esperada" (FTE) como o intervalo $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$. Qual é a FTE em ^{o}F correspondente à FTE $(29\,^o\mathrm{C}, 31\,^o\mathrm{C})$?

4. Verifique a validade das relações fundamentais abaixo.

a Mostre que $\boxed{\text{cov}(X, Y) = \langle X.Y \rangle - \langle X \rangle.\langle Y \rangle}$ e que $\text{cov}(X, Y) = 0$ se X e Y forem independentes.

b $\boxed{\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2\,\text{cov}(X, Y)}$

5. A **função geradora** de uma variável aleatória discreta X é uma função descritiva de uma v.a.. Trata-se de uma transformada da distribuição de probabilidade associada $\{p_n\}$, e é definida como

$$g_X(z) \equiv \sum_{n \in S_X} p_n z^n$$

onde $p_n = \mathbb{P}(X = n)$ e S_X é o espaço de realizações de X. Obtenha as funções geradoras das v.a.'s abaixo.

a Bernoulli, $p_0 = 1 - p$, $p_1 = p$

b binomial, $p_n = \binom{N}{n} p^n (1 - p)^{N-n}$, $n = 0, \cdots, N$

6. Uma v.a. binomial de parâmetros N e p é a soma de N v.a.'s de Bernoulli independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) entre si, todas com parâmetro p (chance de sucesso). Informalmente, "o número total de sucessos em N tentativas é a soma de contribuições em cada tentativa isolada". Obtenha a média e a variância de uma binomial a partir das grandezas análogas em uma v.a. Bernoulli.

7. Um passeio ou caminhada aleatória unidimensional (1D *random walk*) é um importantíssimo modelo em física estatística. Um andarilho desloca-se em uma grade regular unidimensional, sempre com sucessivos passos de tamanho unitário, um de cada vez. Cada passo é dado para a direita com probabilidade p, ou para a esquerda, com probabilidade $1-p$, independentemente dos passos já dados anteriormente. A posição final S_N após um número N total de passos (fixo!) é uma v.a. cujas propriedades podem ser estudadas de diversas formas. Veremos duas delas neste exercício.

A De forma análoga ao exercício 6, a posição final S_N do andarilho pode ser escrita como a soma de várias v.a.'s de Bernoulli *modificadas*, para resultar não em 0 ou 1 como naquele caso, mas sim em -1 ou $+1$, agora. Nesse formalismo, determine a média e a variância de S_N.

B A posição final S_N do andarilho também pode ser expressa diretamente em termos de uma v.a. binomial associada ao problema. Note que há duas outras v.a.'s "naturais" neste problema, N_+, que indica o número de passos dados à direita, e N_-, que indica o número de passos dados à esquerda. Essas duas v.a.'s são binomiais (sucesso de uma é fracasso da outra!) e fortemente dependentes uma da outra, pois satisfazem o vínculo $N_+ + N_- = N$. Mas note que $S_N = N_+ - N_-$!!! Use estas duas expressões para eliminar N_- e verifique que S_N é dada pela binomial N_+ sujeita a transformações de escala e translação. Determine a média e a variância de S_N por este formalismo e agora arrisque escrever a distribuição de probabilidade de S_N, pois você conhece os efeitos simples de escala e translação em uma distribuição de probabilidade (p. 43-44 das notas de aula).

8. (*Random walk* modificado) Um andarilho exibe "tropeços curtos". Um primeiro passo é equiprovável para qualquer lado, mas o 2o. passo ocorre na mesma direção do anterior com probabilidade p (e na direção oposta com probabilidade $1-p$). Rapidamente ele se reequilibra, e o padrão se repete: 3o. passo equiprovável para qualquer lado, o 4o. pode "seguir a inércia". Note que os passos pares *não são* independentes dos passos imediatamente anteriores, ímpares. Mas, dois a dois, há independência! Imagine uma caminhada com um número total par de passos, $N \to 2M$. Determine, com probabilidade básica, a distribuição de probabilidade de cada possível "passo duplo" (conjunto de dois passos): determine os possíveis deslocamentos e suas probabilidades. Expresse a posição final S_{2M} como a soma de M passos duplos que são independente entre si e determine sua média e sua variância. Faça o mesmo (determinar média e variância) para uma caminhada com número ímpar de passos, $N \to 2M+1$. Afinal, o último passo não é duplo, mas é independente dos anteriores, certo?

Exercícios sobre a distribuição de velocidades de Maxwell e as interpretações estatísticas da temperatura e da pressão: [Blundell], cap. 5: 1, 3 e 4; cap. 6: 5 a 8.

Gabarito parcial

1.

a média: λ; variância: λ. Dica: série de potências da exponencial

b média: $1/p$; variância: q/p^2. Dica: mesmo truque da "monitoria binomial", com derivadas parciais

c média: $(b+a)/2$; variância: $(b-a)^2/12$

d média: p/λ; variância: p/λ^2. Dica: mesmo truque da"monitoria exponencial", com a função gama

3. $(84,2\,^o\mathrm{F}, 87.8\,^o\mathrm{F})$

5.

a $1-p+pz$

b $(1-p+pz)^N$

6. média: Np; variância: $Np(1-p)$

7.

A média: $N(2p-1)$; variância: $4Np(1-p)$

B média: $N(2p-1)$; variância: $4Np(1-p)$; $\mathbb{P}(S_N = m) = \mathbb{P}(N_+ = (m+N)/2)$

8. $\langle S_{2M}\rangle = 0$; $\mathrm{var}(S_{2M}) = 4pM$; $\langle S_{2M+1}\rangle = 0$; $\mathrm{var}(S_{2M+1}) = 4pM + 1$