

CAPÍTULO 13
ANÁLISE DE VARIÂNCIA COM UM FATOR:
CASO BALANCEADO

Vamos analisar de forma mais completa o modelo com um fator.

Para resolver o sistema de equações normais nós usaremos:

- Condições marginais
- Abordagem com inversas generalizadas

Para testar hipóteses na Seção 13.4 nós usaremos as abordagens:

- Modelo completo *versus* modelo reduzido
- Hipótese linear geral

13.1 O MODELO COM UM FATOR (*ONE-WAY MODEL*)

O modelo balanceado com um fator pode ser expresso como:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \quad (13.1)$$

$$i = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, n$$

Em que:

y_{ij} é a resposta da j -ésima observação dentre as unidades que receberam o i -ésimo tratamento

μ é uma constante comum a todas as unidades

α_i é o efeito do i -ésimo tratamento

ε_{ij} é o erro associado à observação y_{ij}

As três suposições que fazem parte do modelo são:

1. $E(\varepsilon_{ij}) = 0$ para todo i, j
2. $var(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2$ para todo i, j
3. $cov(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{rs}) = 0$ para todo $(i, j) \neq (r, s)$

Muitas vezes nós incluiremos a suposição:

4. $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$

Adicionalmente, usaremos a restrição (condição marginal):

5. $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$

13.2. FUNÇÕES ESTIMÁVEIS

Já sabemos: Uma função $\lambda' \beta$ é estimável no modelo $y = X\beta + \varepsilon$, em que $E(y) = X\beta$ e X é $n \times p$, de posto $k < p \leq n$, se existe um vetor a tal que $E(a'y) = \lambda' \beta$.

Formas de verificar se a função $\lambda' \beta$ é estimável:

- $\lambda' \beta$ é uma combinação linear das linhas de $X\beta$
- $\text{posto}(X' : \lambda) = \text{posto}(X') = \text{posto}(X) = k$
- $\text{posto}(X'X : \lambda) = \text{posto}(X'X) = \text{posto}(X) = k$
- $X'X(X'X)^{-\lambda} = \lambda$ ou $\lambda'(X'X)^{-X'X} = \lambda'$

13.3. ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

13.3.1 Resolvendo o Sistema de Equações Normais

O modelo (13.1) na sua forma matricial $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, em que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{j} & \mathbf{j} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{j} & \mathbf{0} & \mathbf{j} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{j} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_k \end{bmatrix} \quad (13.6)$$

em que $\mathbf{y}_i = [y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in}]'$, para $i = 1, \dots, k$, $\mathbf{j} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]'$ e $\mathbf{0} = [0 \ 0 \ \dots \ 0]'$ são vetores $n \times 1$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_i = [\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}, \dots, \varepsilon_{in}]'$.

O sistema de equações normais $(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}'\mathbf{y}$ tem a forma:

$$\begin{bmatrix} kn & n & n & \cdots & n \\ n & n & 0 & \cdots & 0 \\ n & 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{..} \\ y_{1.} \\ y_{2.} \\ \vdots \\ y_{k.} \end{bmatrix} \quad (13.7)$$

Em que $y_{..} = \sum_{ij} y_{ij}$ e $y_{i.} = \sum_j y_{ij}$.

13.3.1a. Condições marginais

As $(k+1)$ equações normais em (13.7) podem ser expressas como:

$$\begin{cases} kn\hat{\mu} + n\hat{\alpha}_1 + n\hat{\alpha}_2 + \cdots + n\hat{\alpha}_k = y_{..} \\ n\hat{\mu} + n\hat{\alpha}_i = y_{i.}, \quad i = 1, 2, \dots, k \end{cases} \quad (13.8)$$

Usando a condição marginal $\sum_i \hat{\alpha}_i = 0$, a solução para (13.8) é:

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= \frac{y_{\bullet\bullet}}{kn} = \bar{y}_{\bullet\bullet} \\ \hat{\alpha}_i &= \frac{y_{i\bullet}}{n} - \bar{y}_{\bullet\bullet} = \bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}, i = 1, 2, \dots, k\end{aligned}\quad (13.9)$$

Na forma vetorial, a solução para $(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}'\mathbf{y}$ é expressa como:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \bar{y}_{\bullet\bullet} \\ \bar{y}_{1\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet} \\ \bar{y}_{2\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet} \\ \vdots \\ \bar{y}_{k\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet} \end{bmatrix} \quad (13.10)$$

Se a condição $\sum_i \alpha_i^* = 0$ for imposta sobre os parâmetros teremos:

$$\mu^* = \bar{\mu}_{\bullet\bullet} \quad \text{e} \quad \alpha_i^* = \mu_i - \bar{\mu}_{\bullet\bullet}$$

Exemplo: Um estimador de $\lambda' \beta = \alpha_1 - \alpha_2$ é dado por

$$\lambda' \hat{\beta} = \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2 = (\bar{y}_{1\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot}) - (\bar{y}_{2\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot}) = \bar{y}_{1\cdot} - \bar{y}_{2\cdot}.$$

- Pelo Teorema 12.3D, $\lambda' \hat{\beta}$ é *BLUE* de $\lambda' \beta = \alpha_1 - \alpha_2$.
- Se $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$, pelo Teorema 12.3H, tem-se que $\lambda' \hat{\beta}$ é um estimador não viesado de variância mínima de $\lambda' \beta$.

13.3.1b. Inversa Generalizada

Vamos obter uma solução do sistema $(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{y}$ usando uma inversa generalizada de $\mathbf{X}'\mathbf{X}$:

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/n \end{bmatrix} \quad (13.11)$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}'\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{y}_{1\bullet} \\ \bar{y}_{2\bullet} \\ \vdots \\ \bar{y}_{k\bullet} \end{bmatrix} \quad (13.12)$$

Os estimadores em (13.12) e em (13.10) são diferentes, mas fornecem as mesmas estimativas para todas as **funções estimáveis** no modelo (13.6).

Exemplo: Utilizando (13.12) para estimar $\lambda' \beta = \alpha_1 - \alpha_2$ obtemos:

$$\lambda' \hat{\beta} = \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2 = \bar{y}_{1\bullet} - \bar{y}_{2\bullet}.$$

que é igual à estimativa de $\lambda' \beta$ obtida utilizando $\hat{\beta}$ de (13.10).

13.3.2 Um estimador para a variância σ^2

Na suposição 2 para o modelo com um fator em (13.1), nós temos que $\text{var}(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2$, para todo i, j . Para estimar σ^2 nós usamos o estimador apresentado em (12.22):

$$s^2 = \frac{SQResiduo}{k(n-1)} = QMResiduo$$

em que $SQResiduo = \mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y} = \mathbf{y}'[\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}']\mathbf{y}$.

Vale notar que $\text{posto}[\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'] = kn - k = k(n - 1)$ e que:

$$s^2 = \frac{SQResiduo}{k(n-1)}$$

é um estimador não viesado de σ^2 .

Usando $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ de (13.12) temos:

$$SQResiduo = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k y_{i\bullet}^2 \quad (13.13)$$

Ou ainda como:

$$SQResiduo = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})^2 \quad (13.14)$$

13.4 TESTANDO A HIPÓTESE $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$

A hipótese alternativa é

H_a : no mínimo, duas médias diferem entre si.

Como $\mu_i = \mu + \alpha_i$ a hipótese $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$ pode ser expressa como

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k$$

que é testável porque ela pode ser escrita em termos de $(k-1)$ contrastes estimáveis e *l. i.*

13.4.1 Modelo Completo *versus* Modelo Reduzido

A hipótese

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k \quad (13.17)$$

é equivalente a

$$H_0: \alpha_1^* = \alpha_2^* = \cdots = \alpha_k^* \quad (13.18)$$

onde os α_i^* 's estão sujeitos à condição marginal $\sum_{i=1}^k \alpha_i^* = 0$. Com esta restrição, H_0 em (13.18) também é equivalente a:

$$H_0: \alpha_1^* = \alpha_2^* = \cdots = \alpha_k^* = 0 \quad (13.19)$$

- O modelo completo $y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, k$ e $j = 1, 2, \dots, n$, é expresso na forma matricial como $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$.
- Se escrevermos o modelo completo como

$$y_{ij} = \mu^* + \alpha_i^* + \varepsilon_{ij} \quad (\text{sujeito à restrição } \sum_{i=1}^k \alpha_i^* = 0),$$

o modelo reduzido sob H_0 em (13.19) é

$$y_{ij} = \mu^* + \varepsilon_{ij}$$

que na forma matricial, fica $\mathbf{y} = \mu^* \mathbf{j} + \boldsymbol{\varepsilon}$, onde $\mathbf{j} = [1 \ 1 \dots 1]'$ é um vetor $kn \times 1$.

Para ser consistente com o modelo completo $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ escreveremos o modelo reduzido como

$$\mathbf{y} = \mu \mathbf{j} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (13.20)$$

- Para o modelo completo temos:

$$SQ(\mu, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = SQ(\mu, \alpha) = \widehat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{X}' \mathbf{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_i^2.$$

- Para o modelo reduzido em (13.20) temos:

$$\hat{\mu} = (\mathbf{j}' \mathbf{j})^{-1} \mathbf{j}' \mathbf{y} = \frac{y_{..}}{kn} = \bar{y}_{..} \quad (13.21)$$

Então:

$$SQ(\mu) = \hat{\mu} \mathbf{j}' \mathbf{y} = \bar{y}_{..} y_{..} = \frac{y_{..}^2}{kn} \quad (13.22)$$

Em que $\mathbf{j} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]'$ é $kn \times 1$.

- A soma de quadrados para os α 's ajustada para μ é dada por:

$$SQ(\alpha|\mu) = SQ(\mu, \alpha) - SQ(\mu)$$

$$SQ(\alpha|\mu) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{i\bullet}^2 - \frac{y_{..}^2}{kn} = n \sum_{i=1}^k (\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{..})^2 \quad (13.24)$$

Que pode ser expressa como uma forma quadrática de \mathbf{y} :

$$SQ(\alpha|\mu) = \mathbf{y}' \left[\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' - \frac{1}{kn} \mathbf{J} \right] \mathbf{y} \quad (13.25)$$

em que \mathbf{J} é uma matriz $kn \times kn$ de uns.

Esses resultados podem ser arranados num quadro de ANOVA, da seguinte forma:

Tabela 13.1 ANOVA para testar $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k$ no modelo com um fator.

F. de Variação	g.l.	Somas de quadrados
Tratamentos	$k-1$	$SQ(\alpha \mu) = \sum_{i=1}^k \frac{y_{i\cdot}^2}{n} - \frac{y_{\cdot\cdot}^2}{kn}$
Resíduo	$k(n-1)$	$SQResiduo = \sum_{ij} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^k \frac{y_{i\cdot}^2}{n}$
Total	$kn-1$	$SQTotal = \sum_{ij} y_{ij}^2 - \frac{y_{\cdot\cdot}^2}{kn}$

A distribuição quiquadrado e a independência de $SQ(\alpha | \mu)$ e de $SQResiduo$ seguem de resultados estabelecidos na Seção 12.6.2.

Exemplo 13.4.1. Os três métodos (A, B, C) de armazenar alimentos congelados foram comparados por Daniel (1974, pág. 196). A variável resposta é a quantidade de ácido ascórbico (mg/100g) e os dados estão apresentados na Tabela 13.2.

Usando as fórmulas já apresentadas, obtemos:

- $SQ(\alpha|\mu) = 8545,3457 - 8398,0001 = 147,3456$
- $SQResiduo = 8600,3127 - 8545,3457 = 54,9670$
- $SQTotal = 8600,3127 - 8398,0001 = 202,3126$

Tabela 13.2 Ácido ascórbico (mg/100g) de alimentos congelados utilizando três métodos de armazenamento

	A	B	C
	14.29	20.06	20.04
	19.10	20.64	26.23
	19.09	18.00	22.74
	16.25	19.56	24.04
	15.09	19.47	23.37
	16.61	19.07	25.02
	19.63	18.38	23.27
Totais ($y_{i\bullet}$)	120.06	135.18	164.71
Médias ($\bar{y}_{i\bullet}$)	17.15	19.31	23.53

Tabela 13.3 ANOVA para os dados de ácido ascórbico (Ex. 13.4.1)

Fonte de variação	g.l.	SQ	QM	F
Método	2	147,3456	73,6728	24,1256
Resíduo	18	54,9670	3,0537	
Total	20	202,3120		

O p -value $\cong 0$ para $F_{calc} = 24,13$ indica a rejeição de $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ e que podemos concluir que as médias de pelo menos dois métodos de congelamento diferem entre si.

A continuação da análise com a comparação entre as médias dos métodos, buscando o método que apresenta a melhor resposta, será feita mais adiante.

13.4.2 Hipótese Linear Geral

Para simplificar a exposição nós usaremos o caso onde $k = 4$. Neste caso, $\boldsymbol{\beta} = [\mu \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4]'$ e $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$.

Utilizando três contrastes (estimáveis) l.i. e que reproduzem H_0 quando igualados a zero, temos a hipótese equivalente:

$$H_0: \begin{bmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_1 - \alpha_3 \\ \alpha_1 - \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que pode ser expressa como $H_0: \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, em que:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (13.28)$$

A matriz \mathbf{C} em (13.28) usada para expressar $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$ **não é única**. Outros grupos de contrastes podem ser usados em \mathbf{C} , como por exemplo:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ ou } \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

De (12.13) e Teorema 12.6B(iii), nós temos:

$$\begin{aligned} SQHip &= (\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\beta}})'[\mathbf{C}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}']^{-1}(\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ &= \mathbf{y}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'[\mathbf{C}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}']^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \quad (13.29) \end{aligned}$$

que é idêntica a $SQ(\alpha|\mu)$ em (13.23). [ver livro do Rencher]

13.5. ESPERANÇA MATEMÁTICA DOS QUADRADOS MÉDIOS

As $E(QM)$'s para uma análise de variância com um fator são apresentadas na Tabela 13.4. O resultado é dado em termos dos parâmetros α_i^* , tais que $\sum_{i=1}^k \alpha_i^* = 0$.

Tabela 13.4 Esperança dos quadrados médios para um modelo de análise de variância com um fator

F. variação	g.l.	$E(QM)$
Tratamentos	$k-1$	$\sigma^2 + \frac{n}{k-1} \sum_{i=1}^k \alpha_i^{*2}$
Resíduo	$k(n-1)$	σ^2
Total	$kn-1$	

- Se $H_0: \alpha_1^* = \alpha_2^* = \dots = \alpha_k^* = 0$ é verdadeira $\Rightarrow E[QM(\alpha|\mu)] = \sigma^2$;
 $E[QMResiduo] = \sigma^2 \Rightarrow$ esperamos que $F = \frac{QM(\alpha|\mu)}{QMResiduo} \cong 1$.
 - Se H_0 é falsa $E[QM(\alpha|\mu)] > E[QMRes]$ e esperamos um valor de $F > 1$.
- \therefore REGRA: Rejeitaremos H_0 para valores grandes de F .

RENCHER também calcula $E[SQ(\alpha|\mu)]$ e $E(SQResiduo)$ nas seções 13.5.1 e 13.5.2, usando as abordagens do Modelo Completo *versus* Modelo Reduzido e pela Hipótese Linear Geral, respectivamente, e os resultados são idênticos.

13.6. TESTE PARA CONTRASTES

13.6.1 Teste de Hipótese para um contraste $\sum_i c_i \alpha_i$ ou $\sum_i c_i \mu_i$

No modelo com um fator, um contraste $\sum_{i=1}^k c_i \alpha_i$, com $\sum_{i=1}^k c_i = 0$ é equivalente a um contraste $\sum_{i=1}^k c_i \mu_i$, com $\mu_i = \mu + \alpha_i$.

Uma hipótese de interesse é:

$$H_0: \sum_{i=1}^k c_i \alpha_i = 0 \quad \text{ou} \quad H_0: \sum_{i=1}^k c_i \mu_i = 0 \quad (13.50)$$

que representa uma comparação de médias se $\sum_{i=1}^k c_i = 0$.

Exemplo: A hipótese $H_0: \mu_1 = \frac{\mu_2 + \mu_3 + \mu_4}{3}$ que compara a média do grupo 1 (μ_1) com a média das respostas dos grupos 2, 3 e 4 (μ_2, μ_3 e μ_4), pode ser escrita como:

$$H_0: 3\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 - \mu_4 = 0$$

Toda hipótese como (13.50) pode ser expressa como $H_0: \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta} = 0$, onde $\mathbf{c}' = [0, c_1, c_2, \dots, c_k]$ e $\boldsymbol{\beta} = [\mu, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]'$.

Assumindo que $\mathbf{y} \sim N_{kn}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I})$, $H_0: \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta} = 0$ pode ser testada usando o Teorema 12.6 com $m = 1$:

$$F = \frac{(\mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}})'[\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}]^{-1}(\mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}})}{SQResiduo/k(n-1)} = \frac{(\mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}})^2}{s^2 \sum_{i=1}^k c_i^2/n} \quad (13.51)$$

ou

$$F = \frac{\left(\sum_{i=1}^k c_i \bar{y}_{i\bullet}\right)^2}{s^2 \sum_{i=1}^k c_i^2 / n} \quad (13.52)$$

onde $s^2 = \frac{SQResiduo}{k(n-1)} = QMResiduo$.

Note que o numerador tem sempre 1 grau de liberdade.

A soma de quadrados para o contraste $\mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}$ é calculada por

$$SQ(\mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}) = \frac{(\mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}})^2}{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}} = \frac{n\left(\sum_{i=1}^k c_i \bar{y}_{i\bullet}\right)^2}{\sum_{i=1}^k c_i^2}$$

13.6.2 Contrastes ortogonais

Dois contrastes $\mathbf{c}'_i\boldsymbol{\beta}$ e $\mathbf{c}'_j\boldsymbol{\beta}$ são ditos ortogonais se $\mathbf{c}'_i\mathbf{c}_j = 0$

Prova: Assumindo normalidade do vetor \mathbf{y} , os contrastes $\mathbf{c}'_i\boldsymbol{\beta}$ e $\mathbf{c}'_j\boldsymbol{\beta}$ são independentes se $cov(\mathbf{c}'_i\boldsymbol{\beta}, \mathbf{c}'_j\boldsymbol{\beta}) = 0$.

Pelo Teorema 12.3C tem-se que:

$$cov(\mathbf{c}'_i\boldsymbol{\beta}, \mathbf{c}'_j\boldsymbol{\beta}) = \sigma^2 \mathbf{c}'_i(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-}\mathbf{c}_j, \quad \forall (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-}$$

Escolhendo $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-} = diag(0, 1/n, 1/n, \dots, 1/n)$ tem-se

$$cov(\mathbf{c}'_i\boldsymbol{\beta}, \mathbf{c}'_j\boldsymbol{\beta}) = 0 \quad \text{se} \quad \mathbf{c}'_i\mathbf{c}_j = 0 \quad (13.54)$$

admitindo que o primeiro elemento de \mathbf{c}_i e o primeiro elemento de \mathbf{c}_j são iguais a zero.

Por um argumento similar ao utilizado nas provas dos Teoremas 5.6B e 12.6B(v) tem-se que $SQ(\mathbf{c}'_i\boldsymbol{\beta})$ e $SQ(\mathbf{c}'_j\boldsymbol{\beta})$ são independentes.

Conclusão: No modelo balanceado com um fator, se dois contrastes $\mathbf{c}'_i\boldsymbol{\beta}$ e $\mathbf{c}'_j\boldsymbol{\beta}$ são ortogonais (isto é, $\mathbf{c}'_i\mathbf{c}_j = 0$) eles também são independentes e as suas correspondentes somas de quadrados também são independentes.

Importante: No modelo balanceado com apenas um fator, a SQ_{Trat} pode ser particionada em $(k-1)$ somas de quadrados independentes associadas a $(k-1)$ contrastes mutuamente ortogonais.

Teorema 13.6A. No modelo balanceado com um fator, se $\mathbf{y} \sim N_{kn}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I})$ e se $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$ é expressa na forma $H_0: \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, em que as $(k-1)$ linhas de \mathbf{C} são mutuamente ortogonais, $SQHip = (\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\beta}})'[\mathbf{C}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}']^{-1}(\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\beta}})$ pode ser particionada como:

$$SQHip = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(c'_i \hat{\boldsymbol{\beta}})^2}{c'_i(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}c_i} \quad (13.55)$$

onde todas as somas de quadrados $\frac{(c'_i \hat{\boldsymbol{\beta}})^2}{c'_i(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}c_i}$, para $i = 1, 2, \dots, k-1$, são independentes.

Exemplo 13.6.2(a). Vamos ilustrar o uso de contrastes ortogonais com os dados de ácido ascórbico da Tabela 13.2.

Considere os contrastes ortogonais $2\mu_1 - \mu_2 - \mu_3$ e $\mu_2 - \mu_3$. Por (13.50) eles podem ser expressos como:

$$2\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = [0, 2, -1, -1]\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}'_1\boldsymbol{\beta}$$

$$\mu_2 - \mu_3 = \alpha_2 - \alpha_3 = [0, 0, 1, -1]\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}'_2\boldsymbol{\beta}$$

As hipóteses $H_{01}: \mathbf{c}'_1\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ e $H_{02}: \mathbf{c}'_2\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ comparam a média do primeiro tratamento com a dos outros dois e a média do segundo tratamento com a do terceiro, respectivamente.

As médias amostrais dos tratamentos são dadas na Tabela 13.2 como: $\bar{y}_{1\bullet} = 17.15$, $\bar{y}_{2\bullet} = 19.31$ e $\bar{y}_{3\bullet} = 23.53$.

Fonte de variação	g.l.	SQ	QM	F
Contraste $\mathbf{c}'_1\boldsymbol{\beta}$	1	85,0584	85,0584	27,85
Contraste $\mathbf{c}'_2\boldsymbol{\beta}$	1	62,2872	62,2872	20,40
Resíduo	18	54,9670	3,0537	
Total	20	202,3120		

F_1 e F_2 são superiores ao valor tabelado $F_{(0,05;1,18)} = 4,41$ e os p-valores são 0,0000511 e 0,000267, respectivamente. Ambas as hipóteses, H_{01} e H_{02} , são rejeitadas e se conclui que

$$\mu_1 \neq \frac{\mu_2 + \mu_3}{2} \quad \text{e} \quad \mu_2 \neq \mu_3$$

Vale observar também que:

$$SQ_1 + SQ_2 = 85,0584 + 62,2872 = 147,3456 = SQ_{Trat}$$

Teorema 13.6B. Seja $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}$ representando uma das formas quadráticas em (13.56), \mathbf{A} é uma matriz simétrica e idempotente de posto r , $N = abn$ e o vetor aleatório $\mathbf{y} \sim N_N(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I})$, de dimensão $N \times 1$.

Então existem r matrizes idempotentes $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_r$ tais que $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{A}_r$, com $\text{posto}(\mathbf{A}_i) = 1$ para $i = 1, 2, \dots, r$ e $\mathbf{A}_i\mathbf{A}_j = \mathbf{0}$, para $i \neq j$. Além disso, $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}$ pode ser particionado como

$$\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^r \mathbf{y}'\mathbf{A}_i\mathbf{y} \quad (13.59)$$

onde cada $\mathbf{y}'\mathbf{A}_i\mathbf{y} \sim \chi^2(1, \lambda_i)$ e $\mathbf{y}'\mathbf{A}_i\mathbf{y}$ e $\mathbf{y}'\mathbf{A}_j\mathbf{y}$ são independentes para $i \neq j$. (Note que λ_i é um parâmetro de não centralidade).

13.6.3 Contrastes Polinomiais Ortogonais

Suponha que os tratamentos em uma análise de variância com um fator sejam níveis quantitativos e igualmente espaçados, como por exemplo, 5, 10, 15 e 20 kg de fertilizante por parcela.

O pesquisador precisa investigar como a resposta varia com os níveis de fertilizante.

Nós podemos checar se existe uma tendência linear, quadrática ou cúbica nas respostas, ajustando o modelo de regressão polinomial de terceira ordem:

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \beta_3 x_i^3 + \varepsilon_{ij} \quad (13.61)$$
$$i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, \dots, n$$

onde $x_1 = 5$, $x_2 = 10$, $x_3 = 15$ e $x_4 = 20$.

Rencher mostra que os testes sobre os β 's em (13.61) podem ser feitos usando contrastes ortogonais sobre as médias $\bar{y}_{i\bullet}$, que são estimativas de μ_i no modelo (13.1) de ANOVA.

Neste caso que envolve quatro níveis equidistantes, os coeficientes dos contrastes ortogonais em $\mathbf{c}_i'\boldsymbol{\beta}$, usados para testar se os efeitos de 1º, 2º e 3º grau são nulos são:

1º grau	2º grau	3º grau
-3	1	-1
-1	-1	3
1	-1	-3
3	1	1

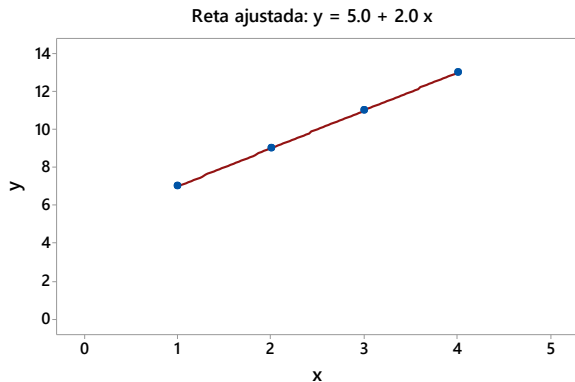
Dúvida: Como saber se os contrastes que utilizam estes coeficientes testam a hipótese de que a tendência das respostas é de 1º, 2º, ou de 3º grau no modelo (13.1) com 4 tratamentos?

Prova: Vamos admitir, sem perda de generalidade, que as respostas médias apresentem uma tendência linear, expressa pela reta

$$y = 5 + 2x$$

e que para os níveis (equidistantes) $x = 1, 2, 3$ e 4 , temos o seguinte conjunto de pontos:

x	1	2	3	4
y	7	9	11	13



Como os quatro pontos (x, y) estão todos sobre uma reta espera-se que o valor do contraste associado à tendência de 1º grau não seja nulo e que todos os outros contrastes, associados às tendências de 2º e 3º grau sejam nulos.

Utilizando os coeficientes dos contrastes ortogonais e calculando os valores dos contrastes $\hat{Y} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + c_4 y_4$, tem-se:

$$1^{\text{o}} \text{ grau: } \hat{Y} = -3(7) - 1(9) + 1(11) + 3(13) = 20$$

$$2^{\text{o}} \text{ grau: } \hat{Y} = 1(7) - 1(9) - 1(11) + 1(13) = 0$$

$$3^{\text{o}} \text{ grau: } \hat{Y} = -1(7) + 3(9) - 3(11) + 1(13) = 0$$

Como a tendência das respostas é linear, somente o contraste para o efeito de 1º grau não é nulo. Os demais contrastes de graus 2 e 3 são nulos.

Esta ideia pode ser generalizada para situações em que os totais (ou as médias) apresentem uma tendência de 2º ou 3º grau.

Na prática é necessário testar se cada contraste é estatisticamente nulo (ou não) para decidir qual é o grau do polinômio ideal.

Os contrastes podem ser escritos em função dos totais ($y_{i\bullet}$) ou das médias ($\bar{y}_{i\bullet}$) dos tratamentos.

A soma de quadrados associada a um contraste de totais é:

$$SQ(\hat{Y}) = \frac{(\hat{Y})^2}{n \sum_i c_i^2}, \text{ em que } \hat{Y} = c_1 y_{1\bullet} + c_2 y_{2\bullet} + \dots + c_a y_{a\bullet}.$$

A soma de quadrados associada a um contraste de médias:

$$SQ(\hat{Y}) = \frac{n(\hat{Y})^2}{\sum_i c_i^2}, \text{ em que } \hat{Y} = c_1 \bar{y}_{1\bullet} + c_2 \bar{y}_{2\bullet} + \dots + c_a \bar{y}_{a\bullet}.$$

Exercício. Em um experimento de substituição do farelo de soja pelo farelo de girassol na ração de suínos, montou-se um experimento com o fator Girassol com 5 níveis (0; 25; 50; 75 e 100%.) de substituição de farelo de soja por farelo de girassol. Foram utilizados 15 suínos machos castrados da raça Duroc-Jersey, num delineamento inteiramente casualizado com 3 repetições. Os ganhos de peso (kg) dos animais aos 112 dias foram:

Porcentagem de substituição				
0	25	50	75	100
85.0	94.5	99.5	93.0	83.0
86.0	96.0	98.0	96.0	80.0
84.0	95.8	104.0	90.5	78.5

Pede-se:

- a) Montar o quadro de ANOVA e testar a hipótese $H_0: \mu_0 = \mu_{25} = \mu_{50} = \mu_{75} = \mu_{100}$
- b) Realizar testes de tendência e decidir qual o grau do polinômio que melhor explica o comportamento dos ganhos de peso em função da porcentagem de substituição de farelo de soja por farelo de girassol.

Polinômio	Níveis do fator				
	1	2	3	4	5
1º grau	-2	-1	0	1	2
2º grau	2	-1	-2	-1	2
3º grau	-1	2	0	-2	1
4º grau	1	-4	6	-4	1