Prova P3 - Gabarito

Q1. [4,0] Um objeto de massa M colide com dois outros de massa $2M$. Dessa colisão elástica os três corpos saem com velocidades como indicado na Figura 3 abaixo.

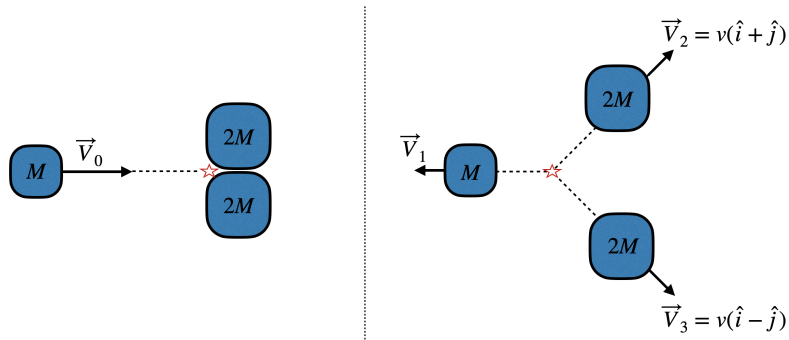

Figura 1: Três corpos sofrem uma colisão elástica.

Considere que as velocidades indicadas na figura acima são $\vec{V}_0 = V_0\,\hat{i}$, $\vec{V}_1 = V_1\,\hat{i}$, $\vec{V}_2 = v(\hat{i}+\hat{j})$ e $\vec{V}_3 = v(\hat{i}-\hat{j})$. (Você pode ter escolhido um sinal diferente para V_1, por exemplo, mas isso não faz diferença no final.)

a. **(1,0)** Escreva as equações (vetoriais!) que expressam a conservação do momento linear do sistema.

Resposta – Conservação de momento significa que

$$M\vec{V}_0 = M\vec{V}_1 + 2M\vec{V}_2 + 2M\vec{V}_3$$

$$\Rightarrow \quad MV_0\,\hat{i} = MV_1\,\hat{i} + 2M\,v(\hat{i}+\hat{j}) + 2M\,v(\hat{i}-\hat{j})$$

Note que você pode ter escolhido um sinal diferente para V_1 na última equação acima, $\vec{V}_1 = -V_1\,\hat{i}$, o que também seria perfeitamente aceitável.

Na direção y a igualdade é automaticamente satisfeita:

$$0 = 2Mv - 2Mv = 0$$

Na direção x temos:

$$MV_0 = MV_1 + 2Mv + 2Mv \quad \Rightarrow \quad V_0 = V_1 + 4v$$

b. **(1,0)** Escreva a equação que expressa a conservação de energia do sistema.
Resposta – Basta igualar a energia cinética antes e depois da colisão:

$$K_i = \frac{1}{2}M\vec{V}_0^2 \quad = \quad K_f = \frac{1}{2}M\vec{V}_1^2 + \frac{1}{2}2M\vec{V}_2^2 + \frac{1}{2}2M\vec{V}_3^2$$

Usando que $\vec{V}_2^2 = \vec{V}_3^2 = v^2 + v^2 = 2v^2$, a equação acima leva a:

$$V_0^2 = V_1^2 + 8v^2$$

c. **(2,0)** Usando os resultados dos itens anteriores, obtenha as velocidades dos corpos após a colisão (ou seja, os valores de V_1 e v), em termos da velocidade inicial V_0.
Resposta – As duas equações acima nos dizem que:

$$V_0 = V_1 + 4v \qquad V_0^2 = V_1^2 + 8v^2$$

Uma solução, claro, é que $v = 0$ e $V_0 = V_1$ – mas nesse caso a colisão não teria ocorrido. A outra solução é obtida resolvendo o sistema acima:

$$V_1 = V_0 - 4v \qquad V_0^2 = (V_0 - 4v)^2 + 8v^2$$

$$\Rightarrow 24v^2 - 8vV_0 = 0$$

Portanto, além da solução $v = 0$ e $V_1 = V_0$, temos também a solução $v = V_0/3$ e $V_1 = -V_0/3$ — ou seja, a massa M sai da colisão com uma velocidade no sentido de x negativo, como aliás ficou indicado na figura. Caso você tenha escolhido o sinal oposto para V_1 desde o início (ou seja, $\vec{V}_1 = -V_1\,\hat{\imath}$), a sua resposta teria sido $V_1 = +V_0/3$.

Q2. **[4,0]** Um corpo de massa m e velocidade inicial $\vec{V}_0$ colide com outro, de massa $2m$ e que se encontra inicialmente em repouso. Neste problema vamos considerar que essa colisão pode ser tanto elástica quanto totalmente inelástica, e que os movimentos de todos os corpos ocorrem na direção x. A situação está representada na Figura 1 (abaixo).

a. **(2,0)** No caso de uma colisão elástica (diagrama de cima da Figura 1), calcule as velocidades finais, $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$, em termos de m e da velocidade inicial $\vec{V}_0$.
Resposta – Este problema é bastante similar à primeira questão, exceto que neste caso todos os movimentos se dão no mesmo eixo (x), não há velocidade na direção y.

Escrevendo conservação de momento temos, já escolhendo o sinal de V_1 e V_2 da maneira mais conveniente:

$$m\,V_0 = -\,m\,V_1 + 2m\,V_2$$

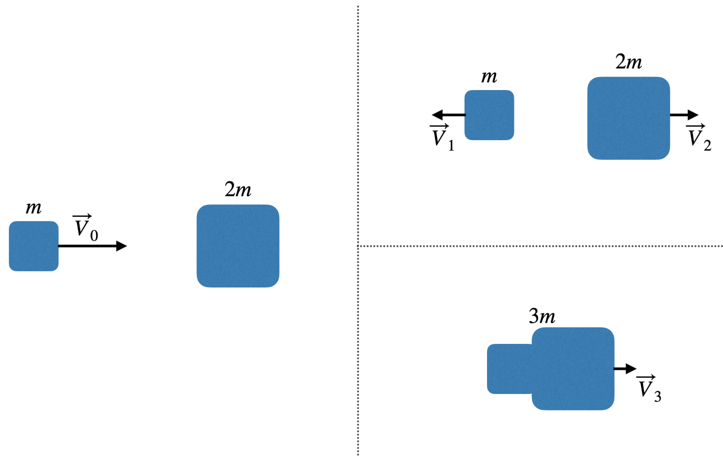

Figura 2: Um corpo de massa m colide com outro de massa $2m$. O caso de uma colisão elástica está representado no diagrama da direita, acima, e quando a colisão é inelástica o resultado é mostrado no diagrama de baixo.

Conservação de energia nos dá:

$$\frac{1}{2}m\,V_0^2 = \frac{1}{2}m\,V_1^2 + \frac{1}{2}2m\,V_2^2$$

Usando a conservação de momento podemos escrever $V_1 = 2V_2 - V_0$ e daí substituir na equação de conservação de energia, obtendo:

$$V_0^2 = (2V_2 - V_0)^2 + V_2^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = 5V_2^2 - 4V_2V_0$$

Portanto, além da solução trivial $V_2 = 0$ (caso de não haver colisão), temos a solução $V_2 = (4/5)V_0$ e $V_1 = (3/5)V_0$. Note que já havíamos escolhido o sinal de V_1 como sendo no sentido de x negativo, se você tivesse feito a escolha oposta, teria obtido que $V_1 \to -(3/5)V_0$.

b. **(2,0)** Agora considere que a colisão é totalmente inelástica (diagrama de baixo da Figura 1, no qual as duas massas terminam grudadas após a colisão). Calcule a velocidade final $\vec{V}_3$ em termos da velocidade inicial $\vec{V}_0$.

Resposta – Neste caso temos apenas conservação de momento. Portanto, a situação é ainda mais simples, temos apenas a equação:

$$mV_0 = 3mV_3$$

Portanto, a solução é $V_3 = V_0/3$. Evidentemente, a energia neste caso não se conserva, e você pode verificar que $K_f = \frac{1}{2}mV_0^2 \; < \; K_i = \frac{1}{2}(3m)V_3^2 = \frac{1}{6}mV_0^2$. A colisão é "totalmente inelástica" porque no referencial do Centro de Massa (que se move com a mesma velocidade do corpo de massa $3m$, $V_{CM} = V_3 = V_0/3$) a energia cinética final é, claro, zero.

Q3. [3,0] Uma betoneira desgovernada de massa M_0 se desloca com velocidade inicial V_0 para a direita. Um bom samaritano vê a situação e, usando a sua metralhadora de alto calibre, tenta frear o caminhão atirando balas contra o mesmo, como indicado na Figura abaixo.

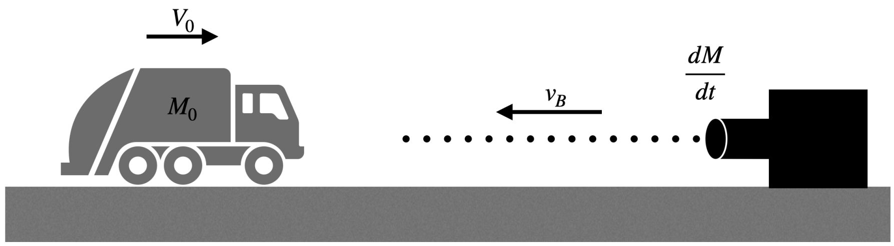

Figura 3: Caminhão que vai sendo brecado pelos tiros de uma metralhadora.

Considere que a metralhadora é capaz de atirar balas a uma taxa contínua de $dM/dt = \alpha$ e de tal forma que todas as balas têm a mesma velocidade v_B. Considere também que as balas não são refletidas após bater no caminhão, mas ficam incrustadas nele.

a. **(1,0)** Mostre que, a partir do momento que as balas começam a atingir a betoneira, sua massa cresce como $M(t) = M_0 + \alpha\, t$, onde $t = 0$ é o instante no qual a primeira bala atirada da metralhadora atinge o caminhão.

Resposta – A taxa de variação de massa da betoneira é exatamente a quantidade de balas que atingem o caminhão, dM/dt.

Neste item você poderia integrar $dM/dt = \alpha \quad \Rightarrow \quad M = C + \alpha t$, tomando $M(t = 0) = 0$ e encontrando $C = M_0$. O modo mais fácil e direto seria simplesmente mostrar que:

$$\frac{d\,M(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\,(M_0 + \alpha t) = \alpha$$

b. **(2,0)** Mostre que a velocidade do caminhão é dada por:

$$V(t) = V_0 - (V_0 + v_B)\frac{M(t) - M_0}{M(t)}$$

Dica: Você não precisa fazer nenhuma integral para responder esta questão. Leia com atenção a expressão acima e pense bem antes de começar a fazer derivadas complicadas – os cálculos desta questão podem ser muito simples!

Resposta – Neste item você deve usar a equação de movimento para sistemas com massa variável:

$$\frac{dP}{dt} = F_{ext} \ ,$$

onde $P = M(t)V(t)$, e F_{ext} é a força que corresponde ao impulso das balas que atingem o caminhão, $-v_B \, dM/dt$.
Usando a equação dada para $V(t)$ temos que:

$$P(t) = M(t)V(t) = M(t)V_0 - (V_0 + v_B)[M(t) - M_0] = (M_0 + \alpha t)V_0 - (V_0 + v_B)\alpha t$$

Portanto, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[(M_0 + \alpha t)V_0 - (V_0 + v_B)\alpha t\right] \\ &= \alpha V_0 - (V_0 + v_B)\alpha \qquad (1) \\ &= -v_B \alpha \qquad (2) \end{aligned}$$

Mas o lado direito da equação acima é exatamente a força exercida pelas balas que atingem o caminhão, $-v_B \, dM/dt = -v_B \alpha$.
Se você tivesse optado por escrever $dP/dt = (dM/dt)V + M(dV/dt)$ diretamente, o resultado final seria o mesmo, mas as derivadas seriam mais complicadas – porém, mesmo nesse caso todas as derivadas necessárias a esse cálculo foram dadas no formulário.

Formulário

- Conservação de momento linear (quantidade de movimento):

$$\vec{P} = \sum_i m_i \, \vec{v}_i \quad \Longrightarrow \quad \vec{P}_{\text{inicial}} = \vec{P}_{\text{final}}$$

- Conservação de energia:

$$K = \sum_i \frac{1}{2} \, m_i \, \vec{v}_i^2 \quad \Longrightarrow \quad K_{\text{inicial}} = K_{\text{final}}$$

Obs: no caso de choques inelásticos não há conservação de energia e $K_{\text{final}} < K_{\text{inicial}}$.

- Sistemas com massa variável:

$$\frac{d\,\vec{P}}{dt} = \frac{d\,(M\,\vec{V})}{dt} = M\frac{d\,\vec{V}}{dt} + \frac{d\,M}{dt}\vec{V}$$

- Algumas derivadas e integrais:

$$\frac{d\,(x^n)}{dx} = n\,x^{n-1} \quad \longleftrightarrow \quad \int_{x_0}^{x} dx'\,(x')^n = \frac{1}{n+1}\,\left(x^{n+1} - x_0^{n+1}\right)$$

$$\frac{d\,(e^{a\,x})}{dx} = a\,e^{a\,x} \quad \longleftrightarrow \quad \int_{x_0}^{x} dx'\,e^{a\,x'} = \frac{1}{a}\,\left(e^{a\,x} - e^{a\,x_0}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a+bx}\right) = -\frac{b}{(a+bx)^2}$$

- Derivada da soma é a soma das derivadas:

$$f = f_1(x) + f_2(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = \frac{df_1}{dx} + \frac{df_2}{dx}\,.$$

$$\vec{A} = \vec{A}_1(x) + \vec{A}_2(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{A}}{dx} = \frac{d\vec{A}_1}{dx} + \frac{d\vec{A}_2}{dx}\,.$$

- Regra do produto para derivadas:

$$f = f_1(x)\,f_2(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = f_1\,\frac{df_2}{dx} + \frac{df_1}{dx}\,f_2$$

$$f = \vec{A}_1(x)\cdot\vec{A}_2(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = \frac{d\vec{A}_1}{dx}\cdot\vec{A}_2 + \vec{A}_1\cdot\frac{d\vec{A}_2}{dx}$$

- Regra da cadeia para derivadas:

$$f = f(y) \quad , \quad y = y(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = \frac{df}{dy}\,\frac{dy}{dx}$$

$$\vec{A} = \vec{A}(y) \quad , \quad y = y(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{A}}{dx} = \frac{d\vec{A}}{dy}\,\frac{dy}{dx}$$

- Produto escalar: dado dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ temos:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\theta\,,$$

onde θ é o ângulo entre os dois vetores. Em coordenadas Cartesianas o produto escalar é dado por $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z$.