Revisão para P2
Aula 25

Primeiro Semestre de 2023

Calcule:

- $\lim_{x \to 0^+} x^{c\,\mathrm{sen}(x)}$
- $\lim_{x \to +\infty} x^2 \tan\left(\frac{b}{x^3}\right)$

Método do intervalo fechado

Determine os pontos sobre a parábola $y = x^2 + 1$ que estão mais próximos e mais distantes do ponto $P = (0, 3)$ para $x \in [-2, 2]$. Qual é a menor distância? E a maior distância? Faça um desenho representando todos os pontos envolvidos.

Derivação implícita

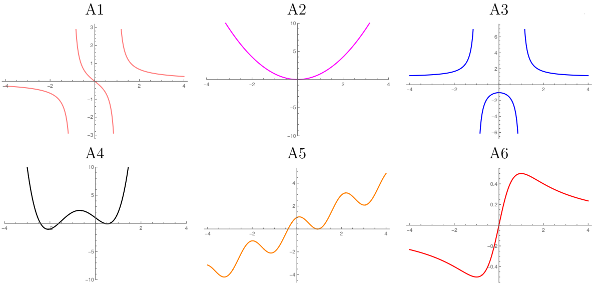
Considere a curva dada pela equação

$$(x - A)^2 y^3 + x(y - B) + x = A.$$

- Mostre que o ponto (A, B) pertence à curva.
- Encontre a equação da reta tangente à curva no ponto (A, B).

Associe cada gráfico à sua função, escrevendo uma breve justificativa, seguindo o exemplo.

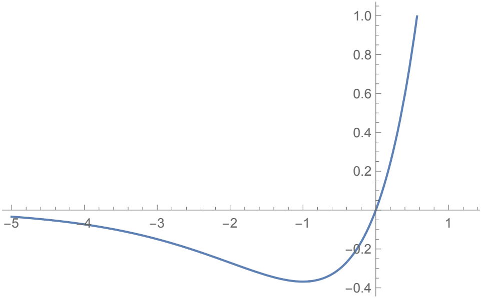
Gráficos:



Funções e suas derivadas:

$f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)}$	$g(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$	$h(x) = x + \cos(3x)$
$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$	$g'(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}$	$h'(x) = 1 - 3\sin(3x)$
$p(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$	$q(x) = x^4 + 3x^3 - 3x + 1$	$m(x) = x^2$
$p'(x) = -\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$	$q'(x) = -3 + 9x^2 + 4x^3$	$m'(x) = 2x$

Faça o gráfico de $f(x) = xe^x$.



Use o polinômio de Taylor de ordem 3 para aproximar $\sqrt{4,001}$. Usando também o resto Lagrange escolha a alternativa que melhor descreve esta aproximação:

1. $\sqrt{4,001} \approx 2 + \frac{10^{-3}}{2^2} - \frac{10^{-6}}{2^6} + \frac{10^{-9}}{2^9}$, este valor é superior ao valor exato, e o módulo do erro é inferior a $5(2^{-14})(10^{-12})$.
2. $\sqrt{4,001} \approx 2 + \frac{10^{-3}}{2^2} - \frac{10^{-6}}{2^6} + \frac{10^{-9}}{2^9}$, este valor é inferior ao valor exato, e o módulo do erro é inferior a $5(2^{-14})(10^{-12})$.
3. $\sqrt{4,001} \approx 2 + \frac{10^{-3}}{2^2} - \frac{10^{-6}}{2^5} + 3\frac{10^{-9}}{2^8}$, este valor é superior ao valor exato, e o módulo do erro é inferior a $15(2^{-11})(10^{-12})$.
4. $\sqrt{4,001} \approx 2 + \frac{10^{-3}}{2^2} - \frac{10^{-6}}{2^6} + 3\frac{10^{-9}}{2^8}$, este valor é inferior ao valor exato, e o módulo do erro é inferior a $15(2^{-11})(10^{-12})$.
5. $\sqrt{4,001} \approx 2 + \frac{10^{-3}}{2^2} - \frac{10^{-6}}{2^5} + 3\frac{10^{-9}}{2^8}$, este valor é superior ao valor exato, e o módulo do erro é inferior a $5(2^{-11})(10^{-12})$.

Derivada da inversa

Proposição (Derivada de funções inversas)

Seja f invertível. Se f for diferenciável em $q = f^{-1}(p)$, com $f'(q) \neq 0$, então f^{-1} será diferenciável em p e

$$\boxed{(f^{-1})'(p) = \frac{1}{f'(f^{-1}(p))}\,.}$$

Derivada da inversa

1. Seja $f(x) = x^5 + 2x^3 + 7x + 1$. Encontre $(f^{-1})'(1)$.
2. Seja $f(x) = \dfrac{e^{-3x}}{x^2+1}$. Encontre a reta tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto $(1, 0)$.

Derivadas de funções definidas por partes

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(|x|), & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se} = 0. \end{cases}$$

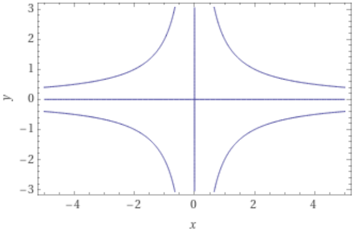
Encontre as fórmulas para f' e f''. Faça o $graf(f)$.

Derivação implícita

Considere a curva

$$2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}xy\right) - xy = 0.$$

- Encontre a fórmula para y'
- Encontre a equação da reta tangente no ponto $(2, 1)$



Sobre algumas derivadas

Seja $a > 0$ uma constante, f e g funcções deriváveis com $f(x) > 0$ para todo x. Então:

- $(x^a)' = ax^{a-1}$
- $(a^x)' = a^x \ln(a)$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\left(f(x)^{g(x)}\right)' &= \left(e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)}\right)' = \left(e^{g(x)\ln(f(x))}\right)' \\
&= e^{g(x)\ln(f(x))}\,[g(x)\ln(f(x))]' \\
&= e^{g(x)\ln(f(x))}\left[g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\tfrac{1}{f(x)}f'(x)\right] \\
&= f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\ln(f(x)) + \tfrac{g(x)'(x)}{f(x)}f\right]
\end{aligned}$$