PEF3208

Aula 9

2 jun

PROF. NAKAO

❖ TENSÕES NORMAIS NA FLEXÃO.

PEF3208
Tensões normais na flexão

7	Correção da P1 e auto avaliação. Tensões e deformações. Lei de Hooke. Coef. de segurança.Tensões admissíveis. Tração e compressão simples.	0,5h	0,5h	0,5h	1,5h	23/5, 11/5, 19/5
8	Características das figuras planas.	0,5h	0,5h	0,5h	1,5h	30/5, 25/5, 26/5
9	Tensões normais na flexão simples normal.	0,5h	0,5h	2h	3h	6/6, 1/6, 2/6
10	**Apresentação do trabalho T.**					**13/6, 15/6, 16/6**
11	**Apresentação do trabalho T.**					**20/6, 22/6, 23/6**
12	Tensões de cisalhamento na flexão simples normal.Torção: barras de seção circular e anular. Revisão.	1h	1h		2h	27/6, 29/6, 30/6
	Prova P2 (Anf Am: t1 e t2; Anf Verm t3 e t4)					**7/7 – 10h**
	Prova SUB 14/7, 10h; REC 21/7, 10h (Anf Verm)					
	Total	5,5h	5,5h	5,5h	16,5h	

Critérios de avaliação de aprendizagem: Provas analítico-expositivas com questões fechadas, trabalho em equipe e auto-avaliação. **P1 e P2 são as notas das provas e T é a nota do trabalho em grupo**. Se (P1 + P2) for maior ou igual a 8 então A = (P1 + P2 + T) / 3. Se (P1 + P2) for menor que 8, então T = 0 e A = (P1 + P2) / 2. Se A for maior ou igual a 5 com uma frequência superior a 70%, então está aprovado. Todas as notas variam de 0 a 10.

As vigas resistem às forças que atuam transversalmente aos seus eixos, como cargas de telhado e piso de edifícios e pontes

Flexão de viga

Os três princípios da mecânica dos sólidos:

Condições de equilíbrio,
Comportamento do material,
Geometria das deformações

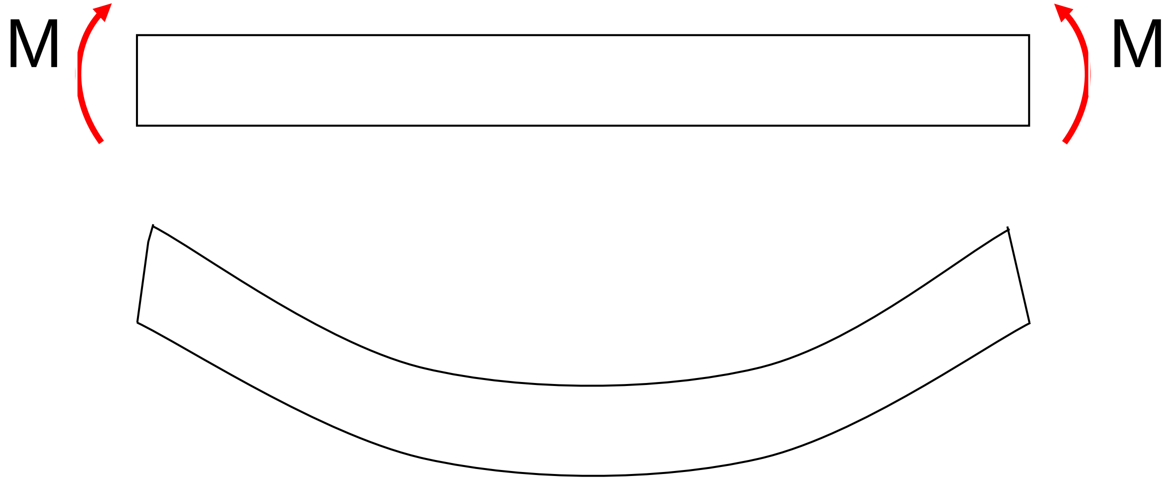
são aplicados na dedução da fórmula da tensão de flexão.

Até certo ponto, os resultados obtidos são bem similares àqueles aplicáveis a barras de torção. Exatamente como nos casos de barras carregadas axialmente e de elementos sob torção, a distribuição das tensões e das deformações nas proximidades dos apoios, nos pontos de aplicação de cargas e nas regiões adjacentes às irregulares geométricas apresenta certas perturbações. (Saint-Venant)

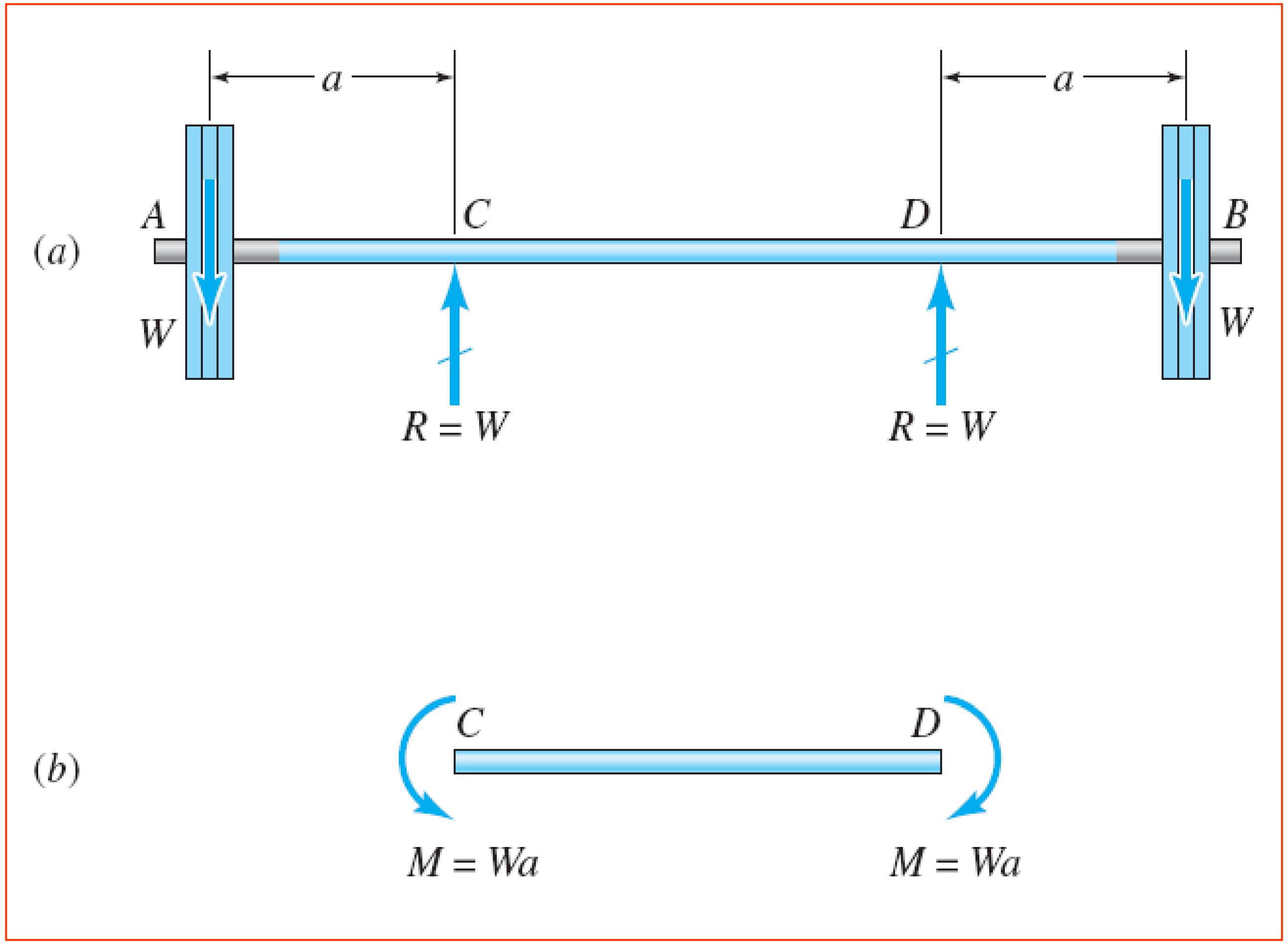
Deformação em vigas sujeitas à flexão pura

- **Flexão pura ocorre quando uma viga é esbelta.**
- **Uma viga esbelta é uma viga que tem seu comprimento(ou vão) 5 ou mais vezes a maior dimensão da seção transversal.**
- **Nesse caso, a tensão de cisalhamento (também chamada de cisalhamento transversal) em comparação com a tensão de flexão não será significativa e, portanto, pode ser desprezada.**
- **Na prática, a relação vão/altura é de aproximadamente 10 ou mais para vigas de metal de seção compacta, 15 ou mais para vigas com almas relativamente finas e 24 ou mais para vigas retangulares de madeira.**

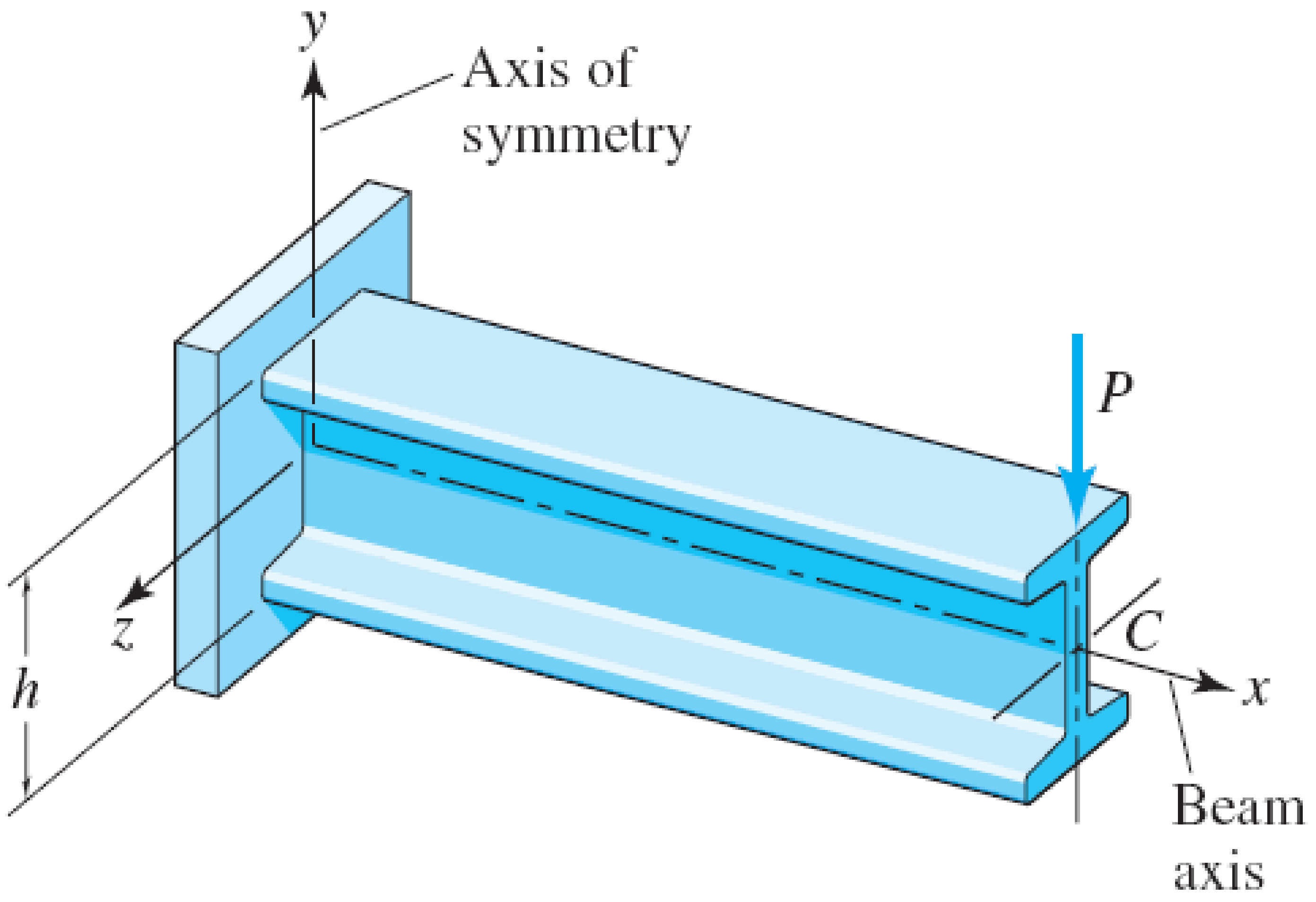
Exemplo de situação de flexão pura



Momento M não causa força cortante.

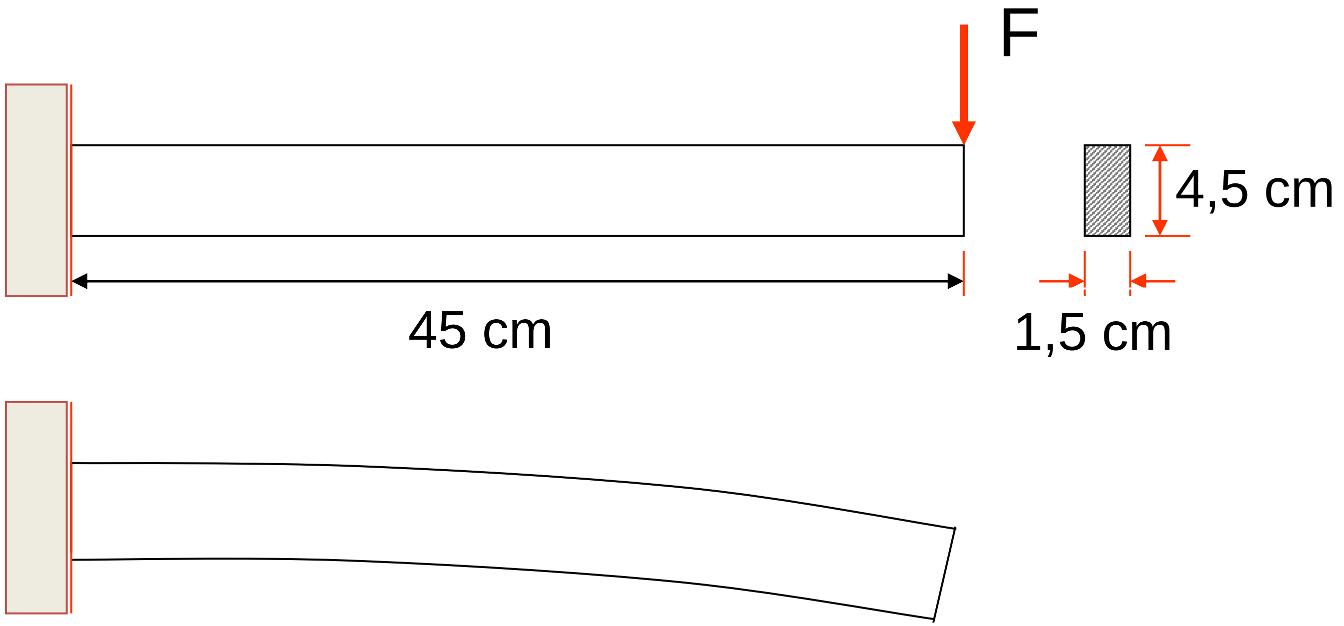


Barra com carregamento simétrico:
(a)diagrama do corpo livre;
(b)porção central em flexão pura.



Uma viga em balanço carregada em seu plano de simetria.

Exemplo de uma situação de flexão quase pura



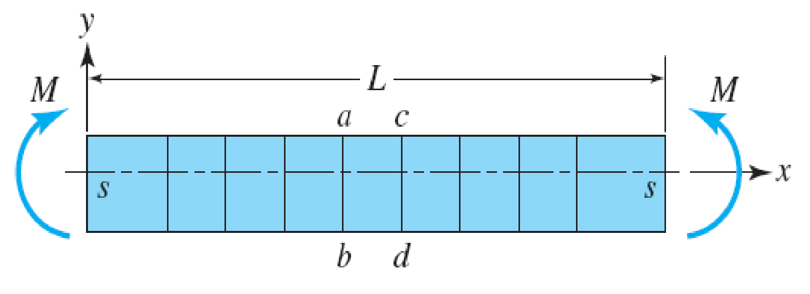
L/altura da ST= 45/4,5 = 10;

é considerada uma viga esbelta e,

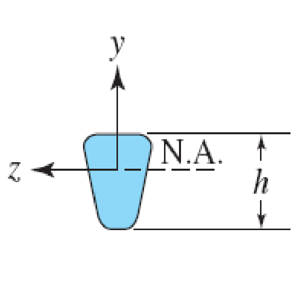
portanto, o efeito da força cortante é desprezado.

Geometria da deformação

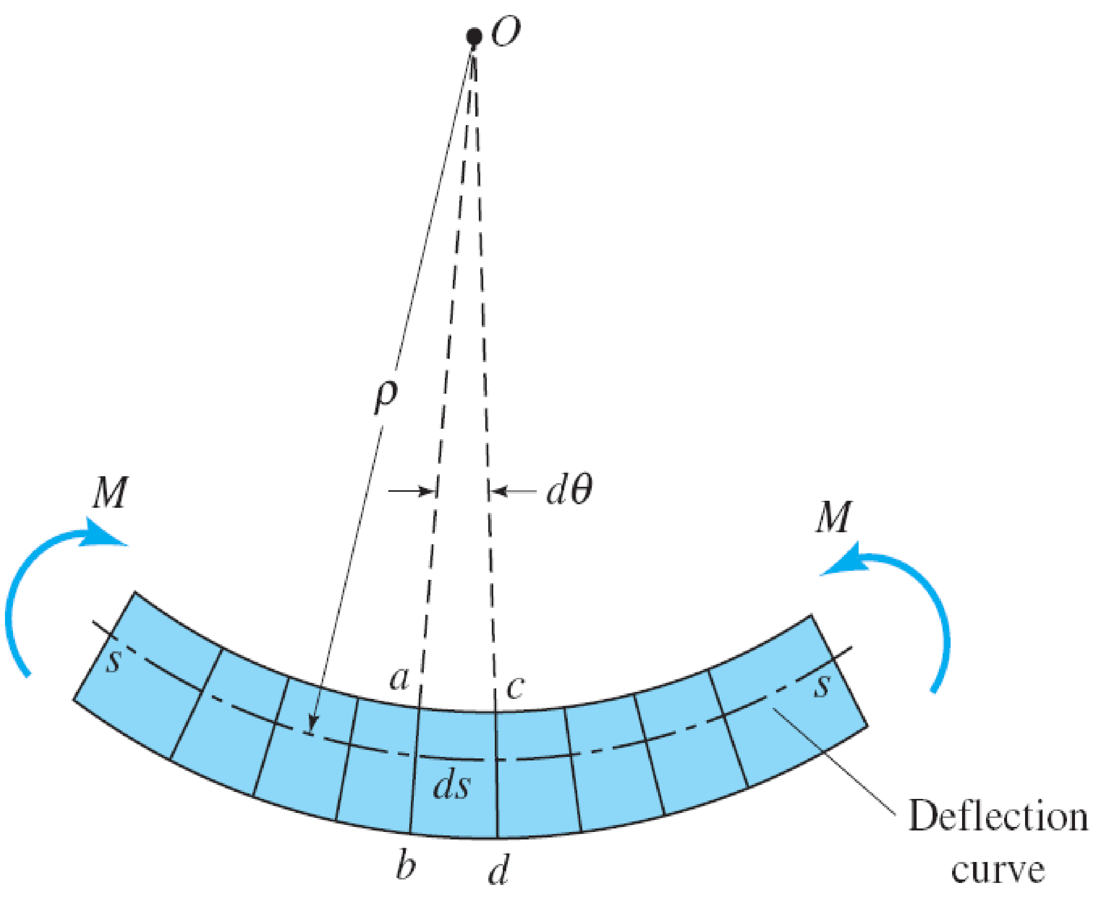
- **Curva de deslocamento (linha elástica)**
- **Eixo longitudinal da viga**
- **Seções planas da viga**
- **Tração versus compressão nas fibras longitudinais da viga**
- **Eixo neutro (linha neutra)**
- **Raio de curvatura (ρ) da viga**



(a)



(b)



(c)

(a)Antes da deformação;
(b)Seção transversal;

VIGA EM FLEXÃO PURA

(c) Após a deformação (flexão)

Raio de curvatura (ρ - rô)

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$$

Curvatura (κ – capa)

Hipóteses para a fórmula de tensão de flexão

1. Os deslocamentos do eixo da viga são pequenos em comparação com o vão da viga. O ângulo de rotação da curva de deslocamento também é muito pequeno e aproximadamente igual à inclinação, $\theta = dv/dx$. Se a viga for ligeiramente curva inicialmente, a curvatura ocorrerá no plano de flexão e o raio de curvatura é grande em relação à sua altura ($\rho \geq 10h$).

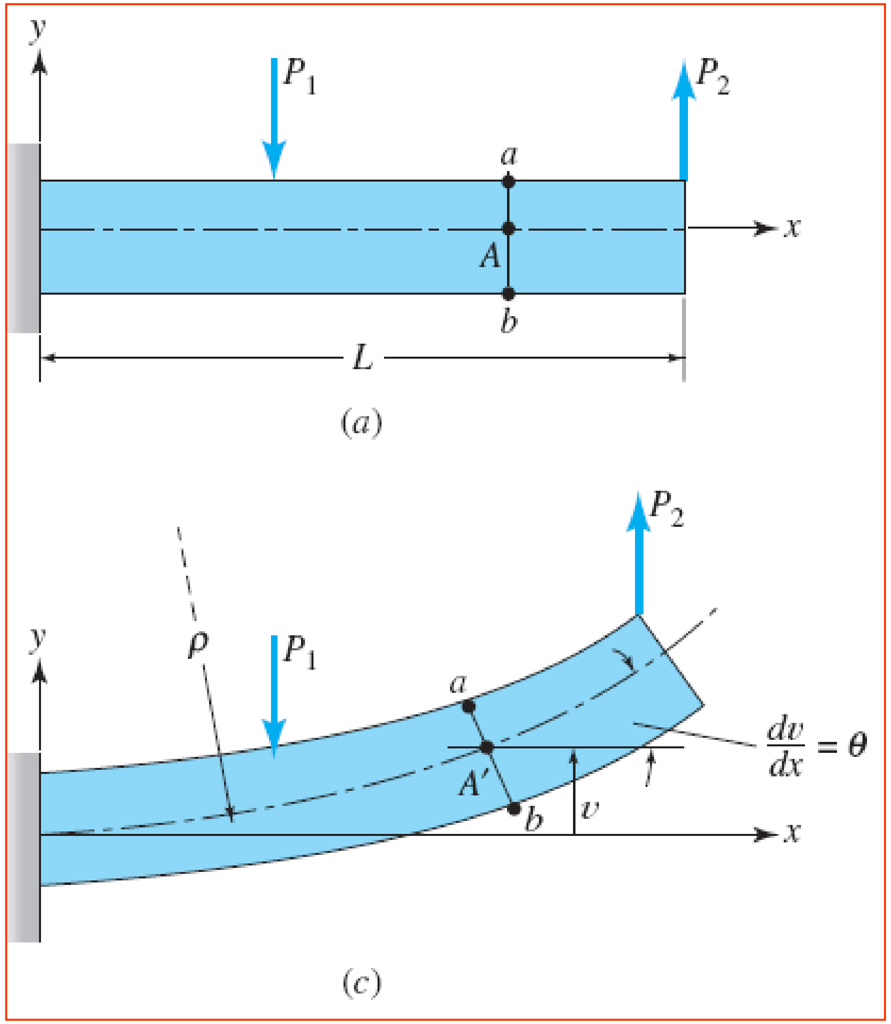
2. As seções planas inicialmente normais ao eixo da viga permanecem planas e normais a esse eixo após a flexão (por exemplo, a seção ab). Isso significa que as deformações de cisalhamento γ_{xy} são desprezíveis. Os deslocamentos da viga estão, portanto, associados principalmente às deformações longitudinais ou normais ε_x .

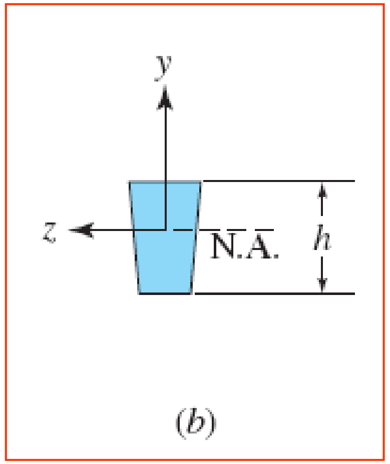
Hipóteses para a fórmula de tensão de flexão

3. **Os efeitos das deformações normais transversais ε_y e das deformações restantes (ε_z, γ_{xz}, γ_{yz}) na distribuição do ε_x também podem ser ignorados.**

4. **A distribuição das tensões normais ou de flexão σ_x não é afetada pela deformação devido às tensões de cisalhamento τ_{xy}. As tensões normais à superfície neutra, σ_y , são pequenas em comparação com σ_x e também podem ser omitidas. Esta suposição torna-se insegura na vizinhança de grandes cargas transversais concentradas.**

Exemplo (viga em balanço)

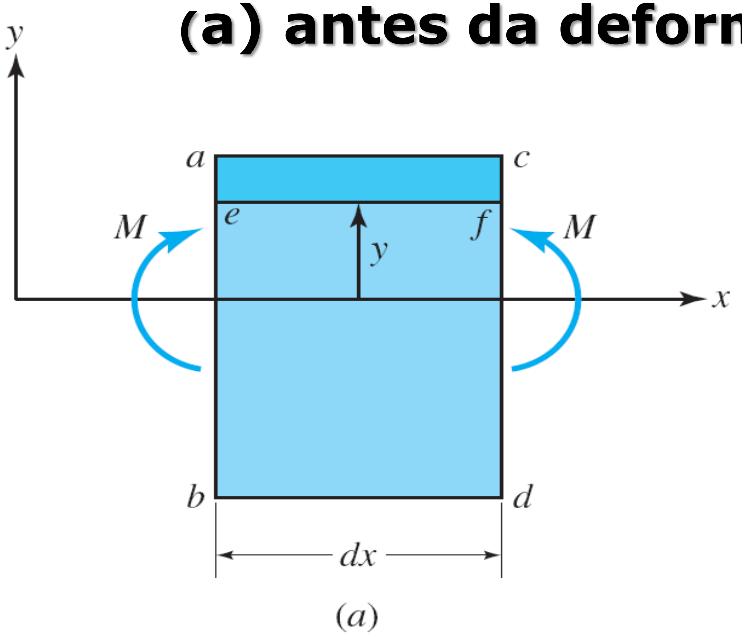


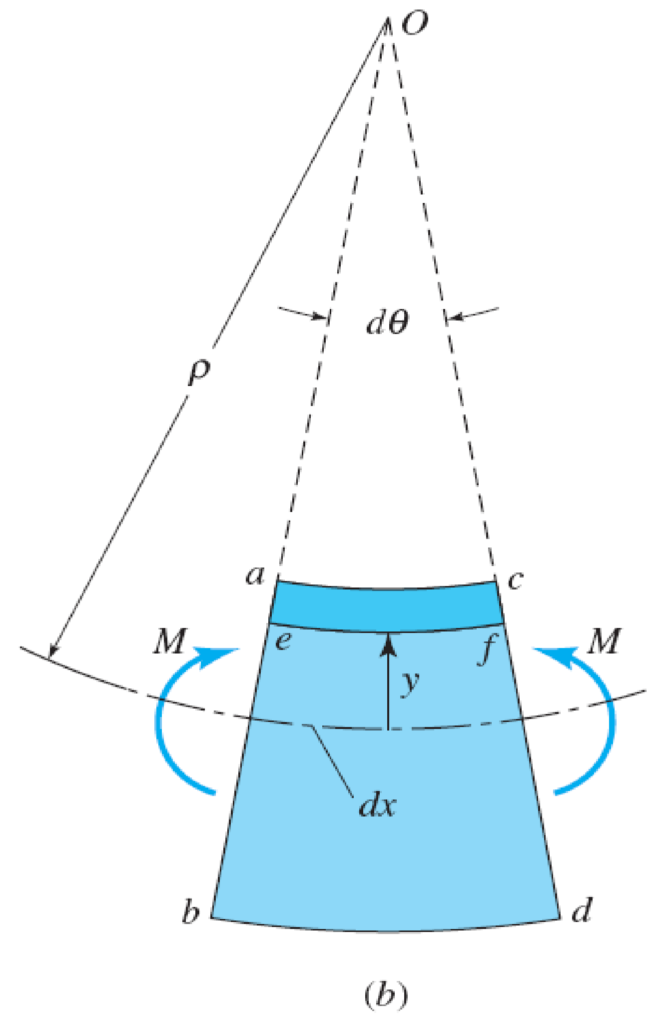


Viga sujeita a um carregamento transversal:
(a) antes da deformação
(b) seção transversal
(c) após a deformação.

Deslocamento υ
Ângulo de rotação θ

(a) antes da deformação.





$$\boldsymbol{\rho * d\theta = dx}$$

$$\boldsymbol{(\rho - y) * d\theta = dx'}$$

Tensões normais em vigas

(b) após a deformação.

Deformação:

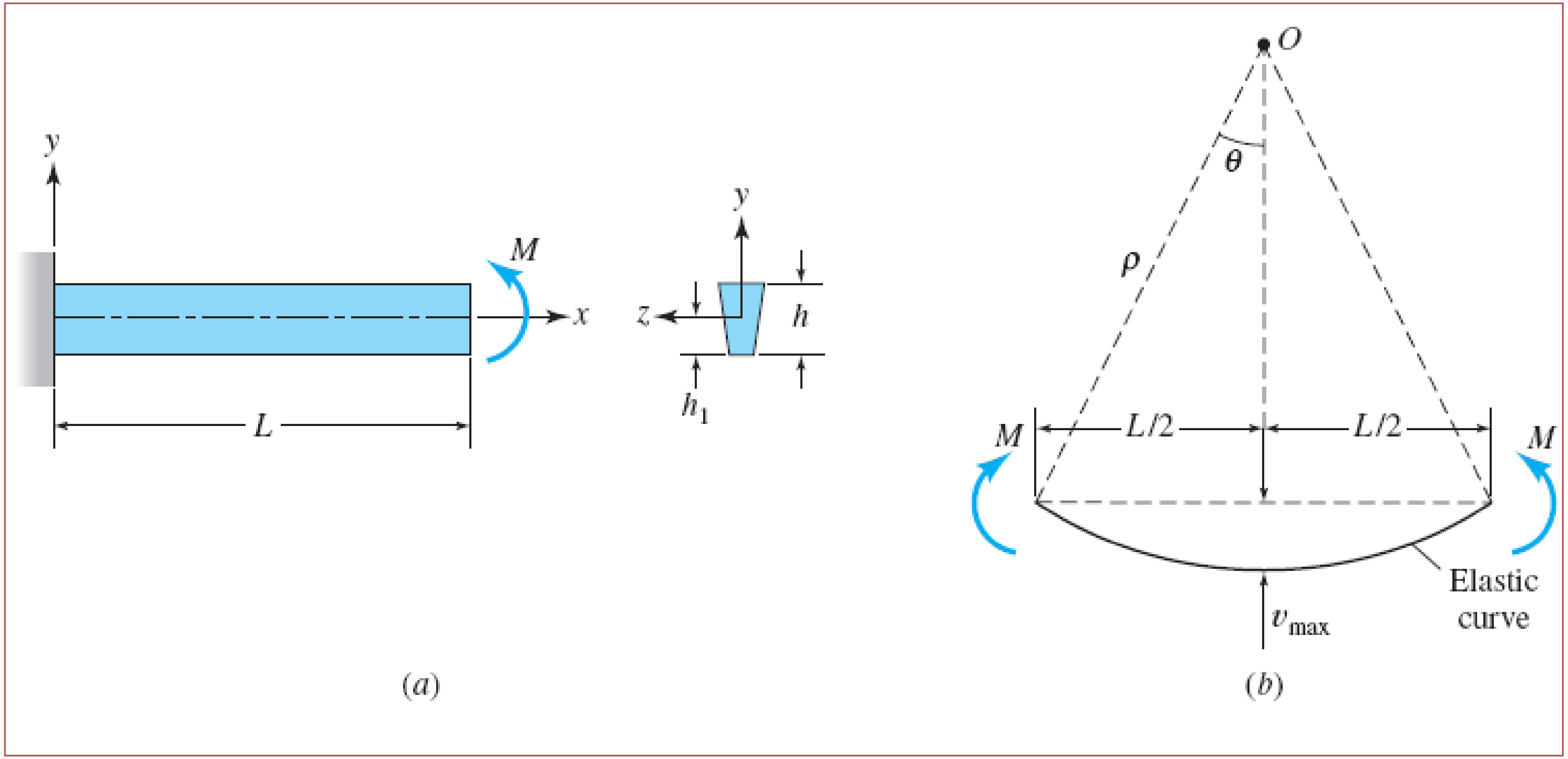
$$dx' - dx = (\rho - y)\, d\theta - \rho\, d\theta = -y\, d\theta$$

$$\boxed{\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} = -\kappa y}$$

Deformação específica normal ε_x

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \nu \kappa\, y = \frac{\nu\, y}{\rho}$$

Deformação transversal (por cisalhamento)



Exercício: Um momento fletor M é aplicado à extremidade livre de uma viga engastada, de aço, com comprimento L=240 cm e altura da seção transversal h=15 cm. Determinar o raio de curvatura, a curvatura e o deslocamento máximo da viga, considerando que $\varepsilon_x = 0,0012$ na superfície inferior da viga $(y = -h_1 = -9\ cm)$

Exercício: Um momento fletor M é aplicado à extremidade livre de uma viga engastada, de aço, com comprimento L=240 cm e altura da seção transversal h=15 cm. Determinar o raio de curvatura, a curvatura e o deslocamento máximo da viga, considerando que $\varepsilon_x = 0,0012$ na superfície inferior da viga ($y = -h_1 = -9\ cm$)

$$\boxed{\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} = -\kappa y}$$

$\boldsymbol{Raio\ de\ curvatura\ e\ curvatura:}$

$$\rho = -\frac{y}{\varepsilon_x} = -\frac{-9}{0,0012} = 7500cm$$

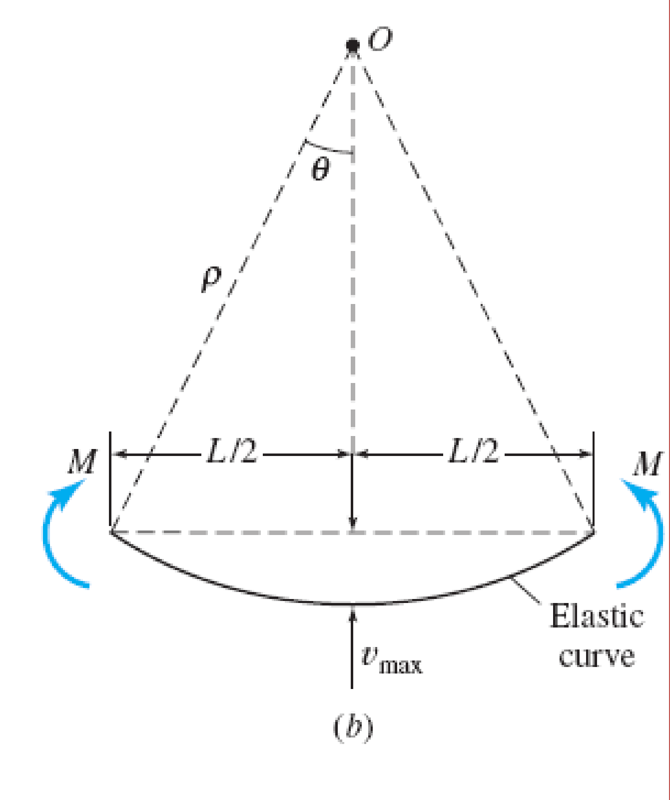
$$\kappa = \frac{1}{\rho} = 0,0001\ cm^{-1}$$

$\boldsymbol{Deslocamento\ máximo:}$

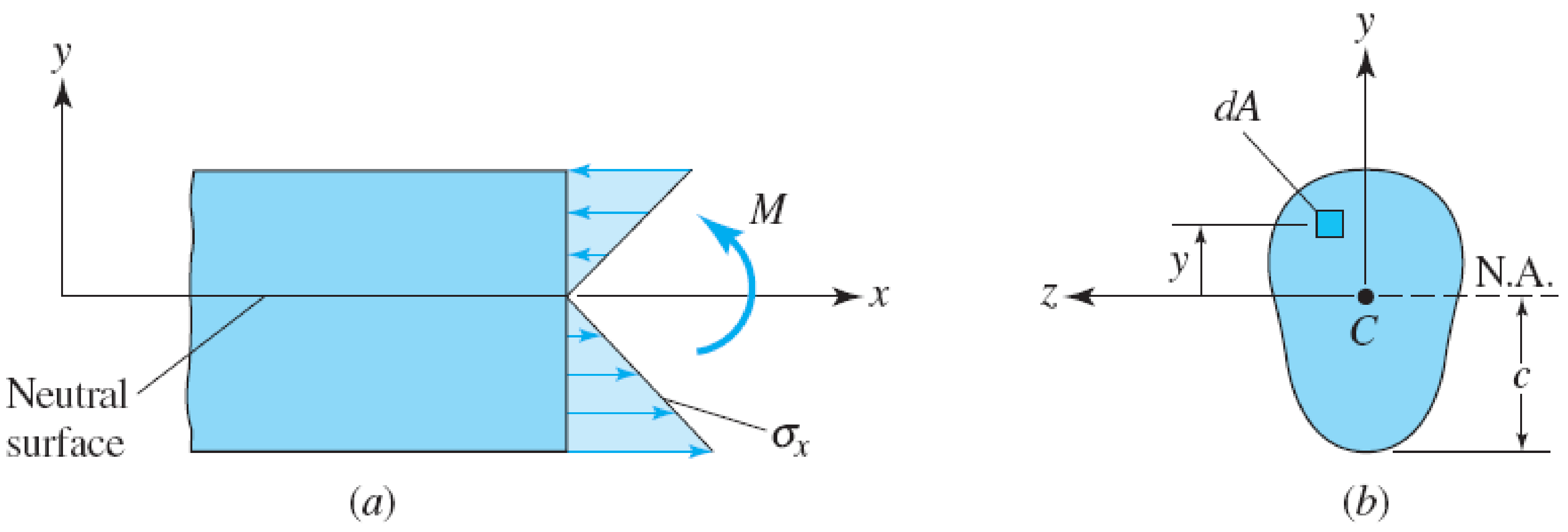
$$sen\ \theta = \frac{L}{2\rho} = \frac{240}{2*7500} = 0,016$$

$$v_{máx} = \rho * (1 - cos\,\theta) = 7500 * (1 - 0,99987)$$

$$v_{máx} = 0,96cm$$



Tensões normais em vigas



Distribuição das tensões de flexão σ_x em uma viga:

$$\sigma_x = E * \varepsilon_x = -E * \kappa * y$$

(A TENSÃO VARIA COM y)

$$\boxed{\sigma_x = -\frac{My}{I}}$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d^2v/dx^2}{[1 + (dv/dx)^2]^{3/2}}$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2}$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

$$\boxed{\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}}$$

Bernoulli-Euler Law

$$\boxed{M = \kappa EI = \frac{EI}{\rho}}$$

Equação do momento com o produto EI conhecido como rigidez à flexão

$$\boxed{\sigma_x = -\frac{My}{I}}$$

Fórmula para calcular a tensão normal na flexão

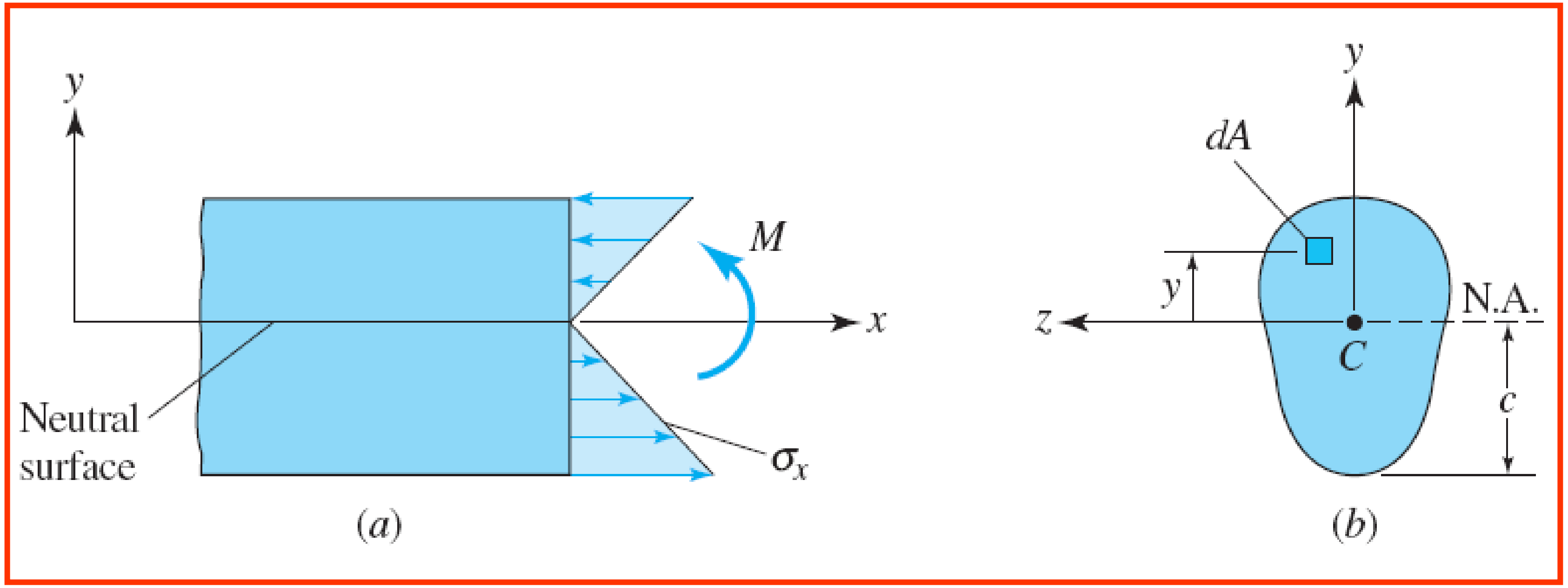
$$\boxed{\sigma_{\max} = \frac{M}{S}}$$

S é chamado de módulo de resistência (S = I/c; c=$|y_{máx}|$)

Procedimento para determinar a tensão normal

- **Desenhe o (s) diagrama (s) de corpo livre e determine as reações de apoio, se necessário**
- **Desenhe o diagrama do momento fletor para determinar a magnitude e localização do momento fletor máximo**
- **Localize o centro de gravidade da seção transversal usando os princípios da estática**
- **Determine o momento de inércia usando o teorema do eixo paralelo, se necessário**
- **Determine o valor máximo (+ ou -) da tensão normal de flexão usando a fórmula de flexão**

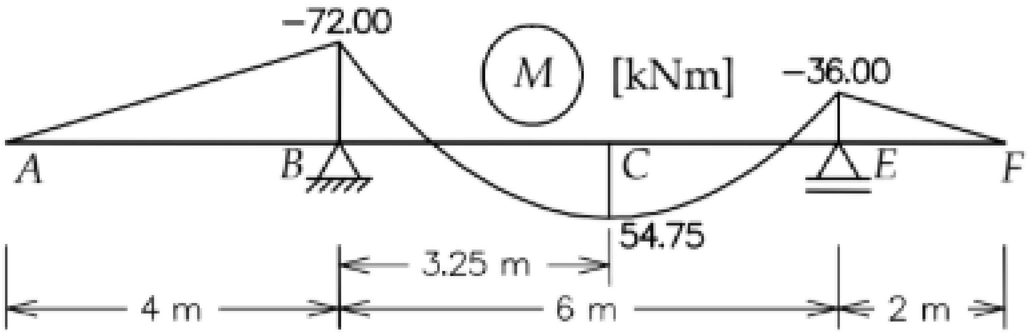
Tensões normais em vigas



Distribuição das tensões de flexão σ_x em uma viga:

$$\boxed{\sigma_x = -\frac{My}{I}}$$

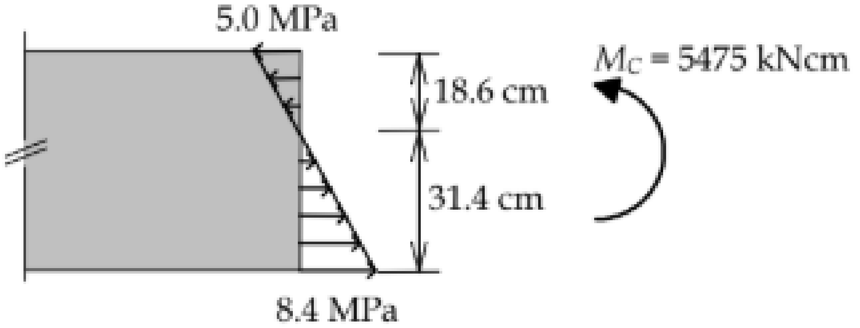
$$\boxed{\sigma_x = -\frac{My}{I}}$$



Tensões normais na seção C:

$$\sigma_s = -\frac{M_C \cdot y_s}{I} = -\frac{5475 \cdot 18.6}{203697} = -0.50 \text{ kN/cm}^2 = -5.0 \text{ MPa}$$

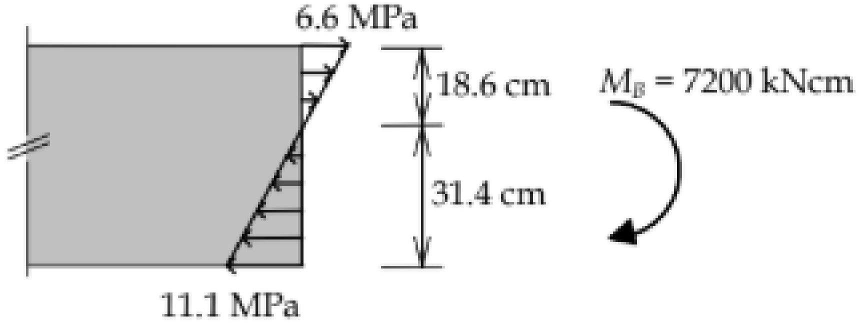
$$\sigma_i = \frac{M_C \cdot y_i}{I} = \frac{5475 \cdot 31.4}{203697} = +0.84 \text{ kN/cm}^2 = +8.4 \text{ MPa}$$



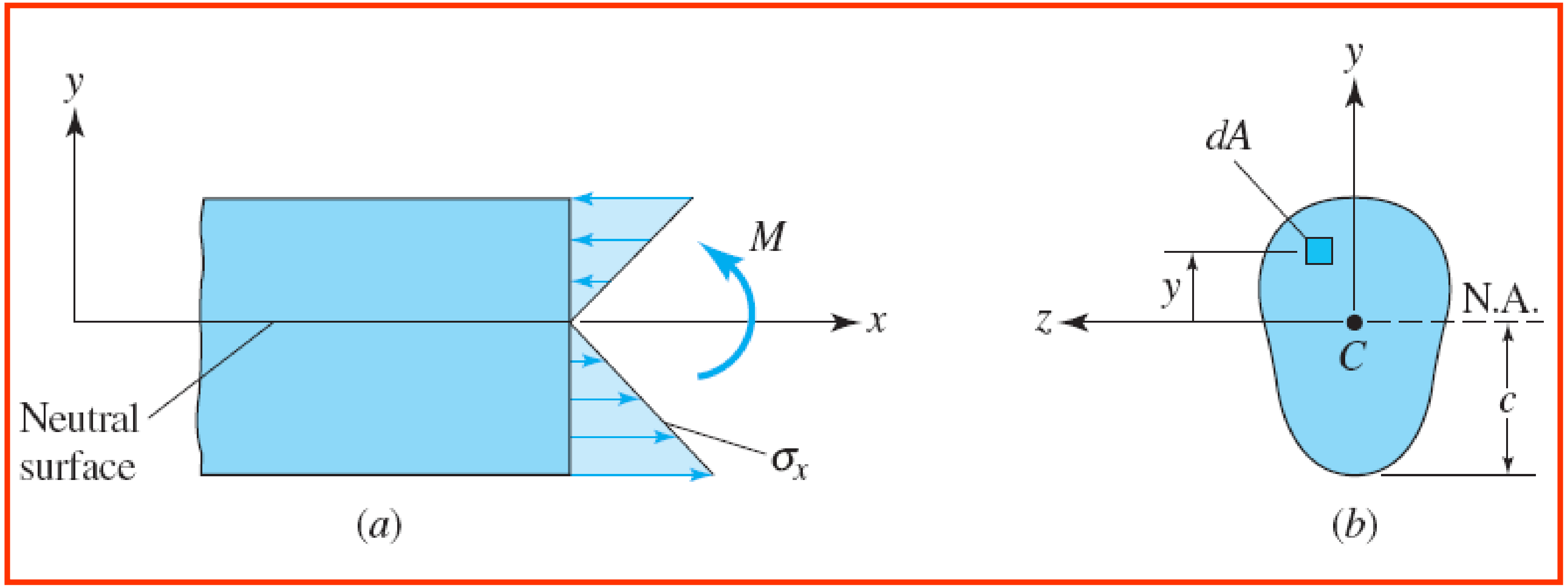
Tensões normais na seção B:

$$\sigma_s = -\frac{M_B \cdot y_s}{I} = -\frac{-7200 \cdot 18.6}{203697} = +0.66 \text{ kN/cm}^2 = +6.6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_i = \frac{M_B \cdot y_i}{I} = \frac{-7200 \cdot 31.4}{203697} = -1.11 \text{ kN/cm}^2 = -11.1 \text{ MPa}$$



Tensões normais em vigas

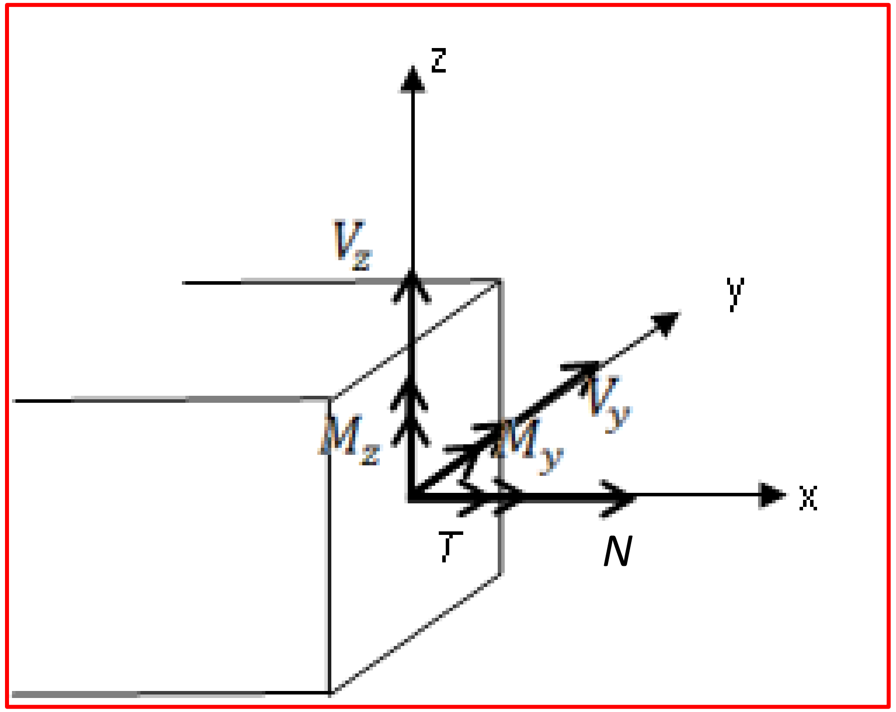


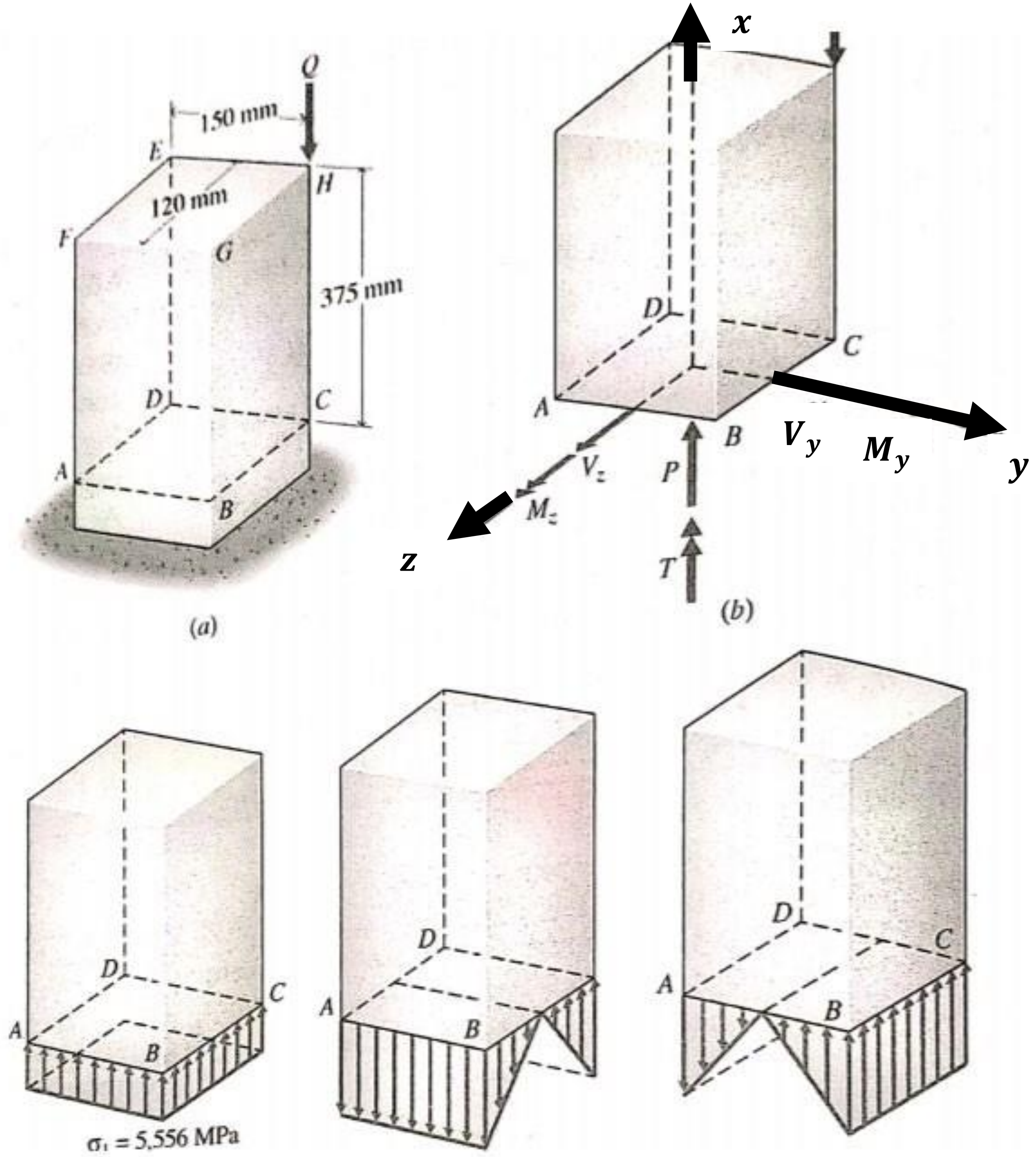
Distribuição das tensões de flexão σ_x em uma viga:

$$\boxed{\sigma_x = -\frac{My}{I}}$$

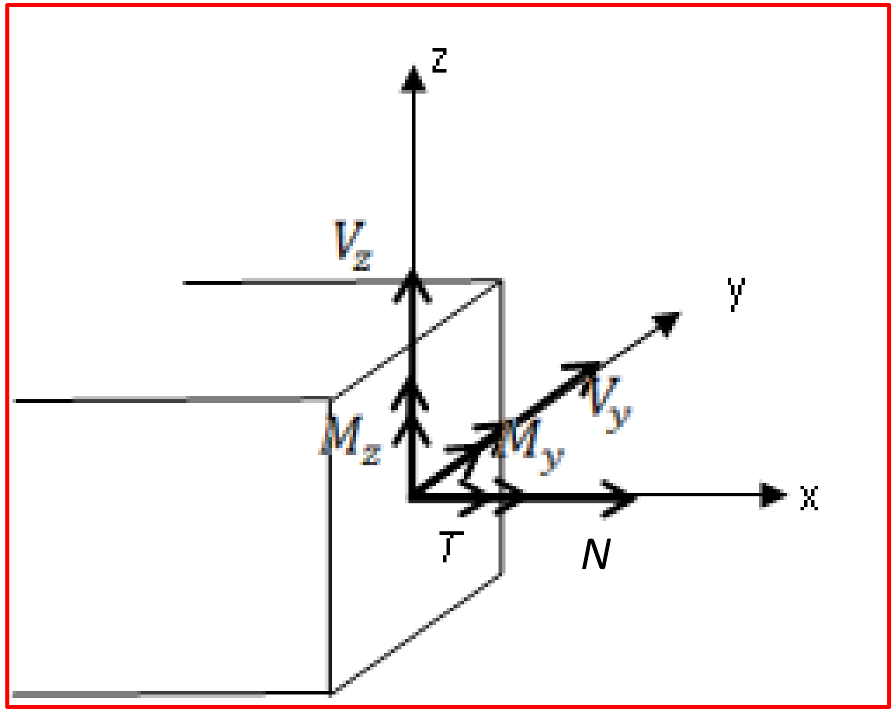
Tensões normais em vigas

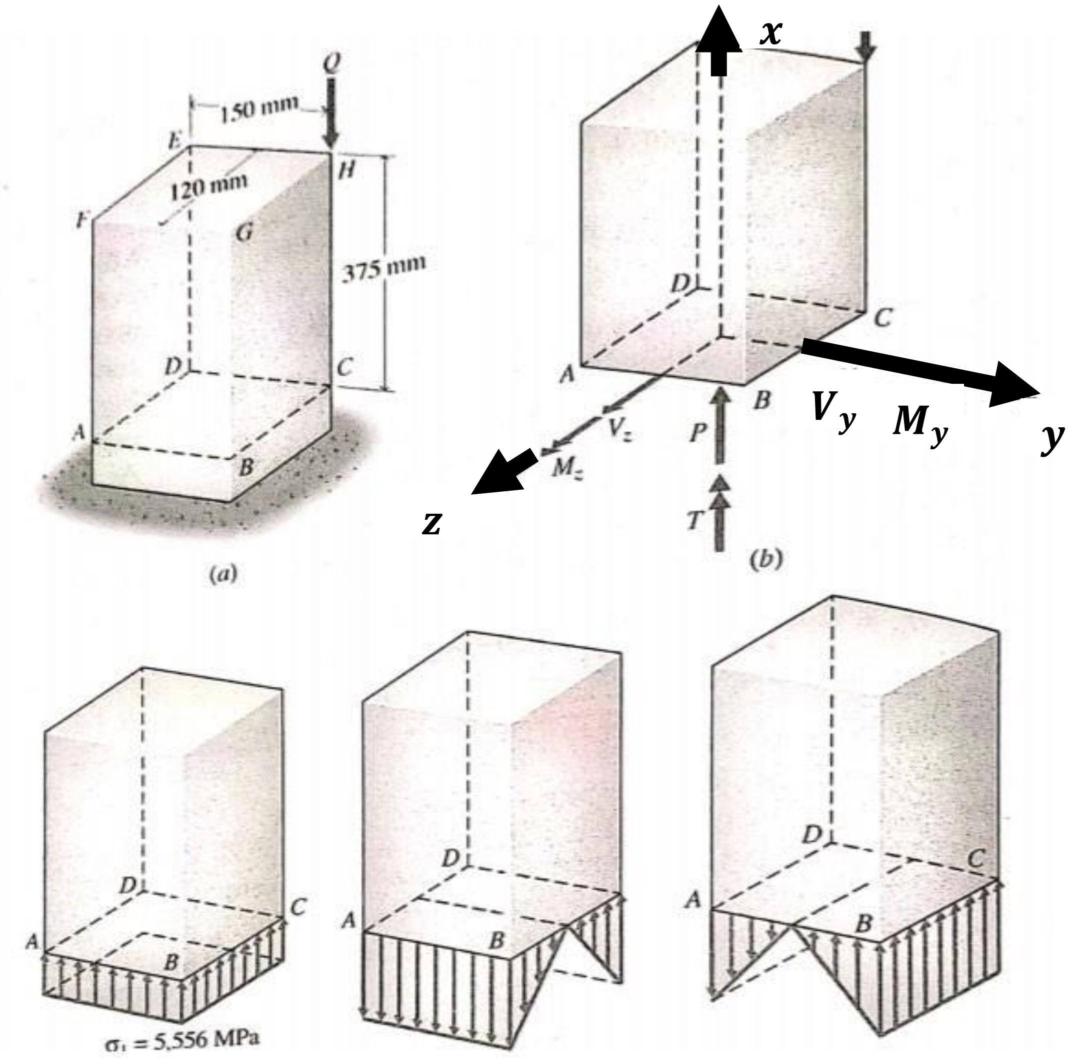
$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z$$





$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$





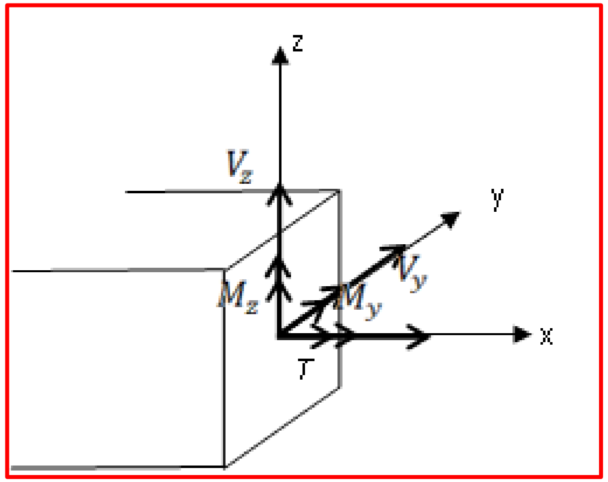
$M_y = M_z = 0 \implies N > 0(\textit{tração simples}); N < 0(\textit{compressão simples})$

$(M_y = 0 \text{ e } M_z \neq 0) \text{ ou } (M_y \neq 0 \text{ e } M_z = 0) \implies N = 0(\textit{flexão normal simples}) \text{ ou } N \neq 0(\textit{flexão normal composta})$

$(M_y \neq 0 \text{ e } M_z \neq 0) \implies N = 0(\textit{flexão oblíqua simples}) \text{ ou } N \neq 0(\textit{flexão oblíqua composta})$

P2 2019

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z$$



4,0

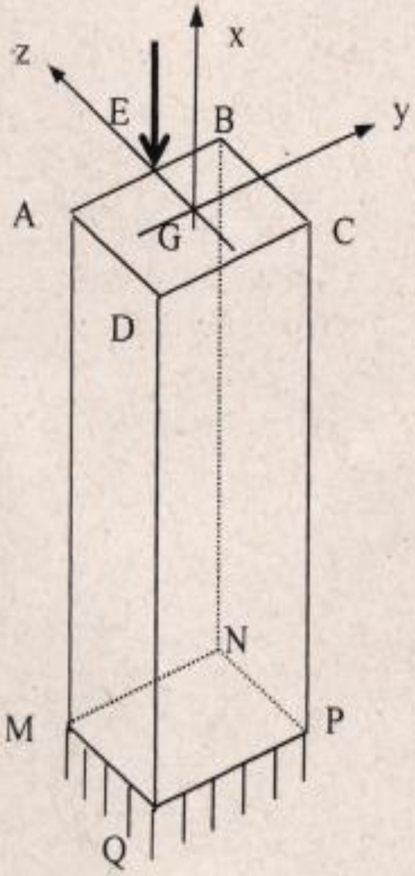
3ª Questão – O pilar de seção retangular de área S, de base MNPQ, está submetido a uma força vertical de 72 kN aplicada no ponto E (a 6 cm de A) do topo ABCD, conforme indicado na figura. Sabendo-se que $S = 72\ cm^2$, $I_y = 216\ cm^4$ e $I_z = 864\ cm^4$, determine:

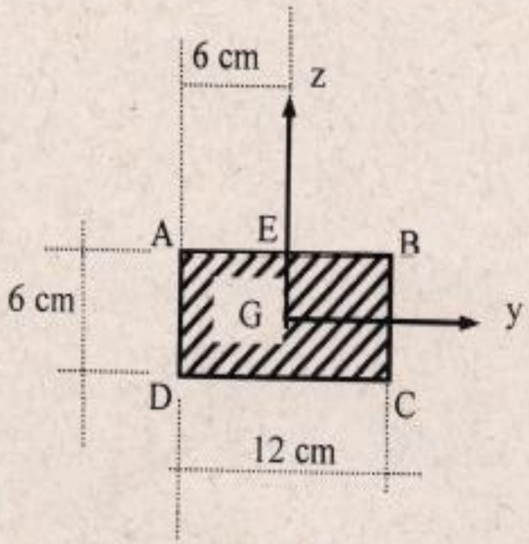
a) Os esforços solicitantes na seção de topo, transferindo a força vertical para o centro de gravidade G;

b) A expressão das tensões normais σ na seção de topo;

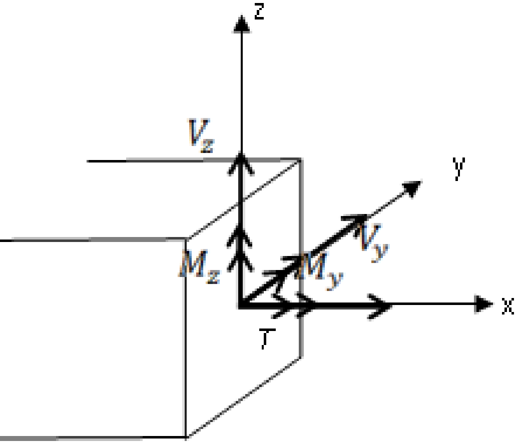
c) A equação da linha neutra e desenhe a sua posição na seção de topo;

d) As tensões normais extremas de tração e de compressão na seção de topo.

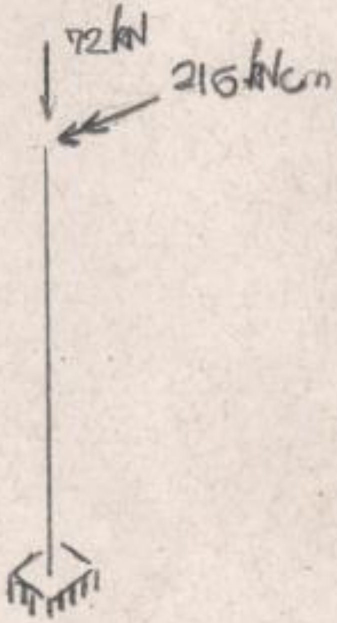




$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z$$



a) transferindo:



Assim:

$$\begin{cases} N = -72\ kN \\ V_y = 0 \\ V_z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = 0 \\ M_{fy} = -216\ kNcm \\ M_{fz} = 0 \end{cases}$$

1,0

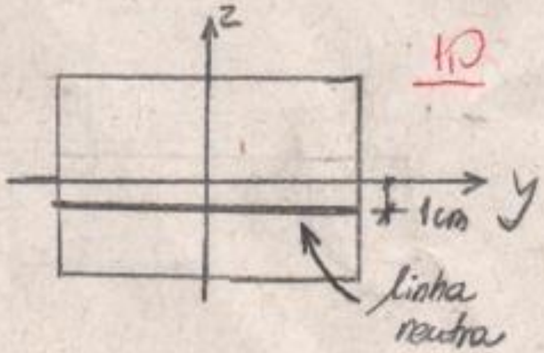
b) $\sigma = -\frac{72}{72} - \frac{216}{216} z = -1 - z$ (em kN/cm^2)

1,0

ou $\sigma = -10 - 10z$ (em MPa) (z em cm)

c) linha neutra $\Rightarrow \sigma = 0$

$-10 - 10z = 0 \Rightarrow \boxed{z = -1cm}$



1,0

d) tensões extremas em $z = -3cm$ (tração) e $z = 3cm$ (compressão):

$\sigma_T = -10 - 10(-3) \Rightarrow \boxed{\sigma_T = 20MPa}$ 0,5

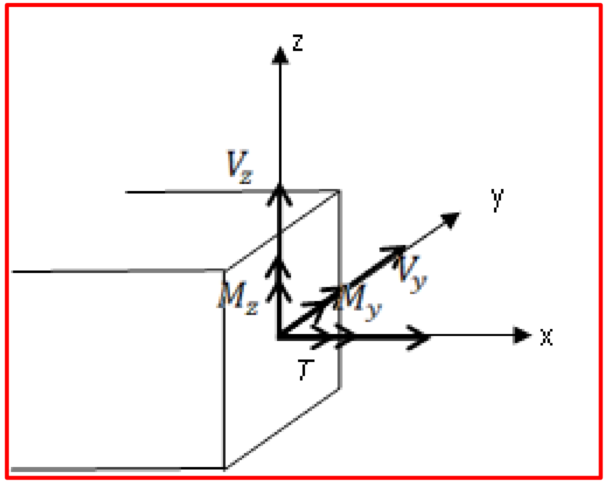
$\sigma_c = -10 - 10 \cdot 3 \Rightarrow \boxed{\sigma_c = -40MPa}$ 0,5

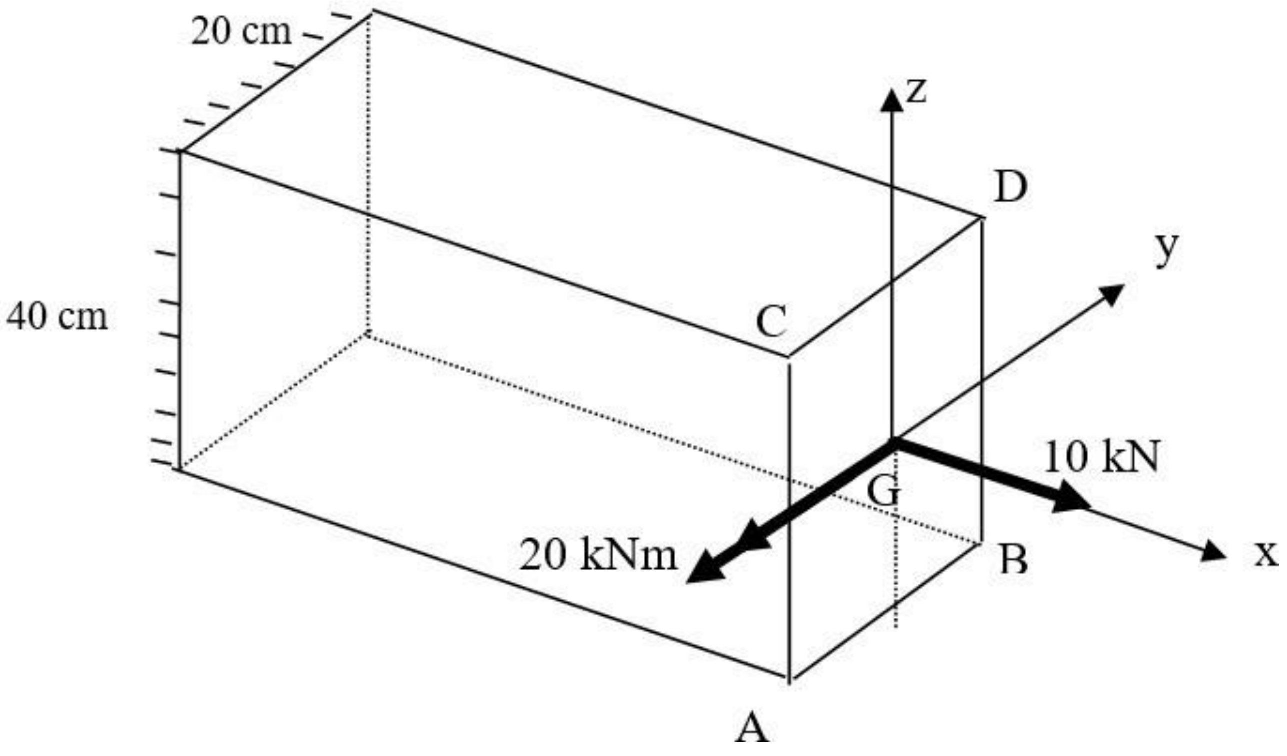
SUB 2019

Questão D (4 pontos): Para a viga em balanço de seção retangular da figura, determine:

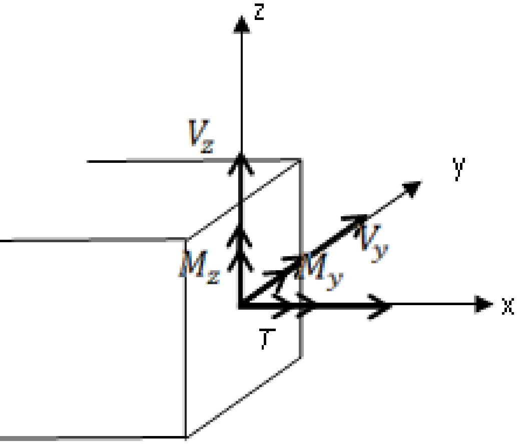
a) os esforços solicitantes no engastamento,
b) a equação das tensões normais,
c) a equação da linha neutra,
d) as tensões normais máximas.

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$





$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$



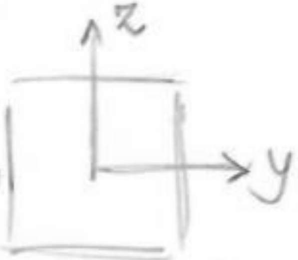
QD 4,0

a) $N = 10\,kN$ $\quad T = 0$

$V_y = 0$ $\quad M_{fy} = -20\,kNm$ 1,0

$V_z = 0$ $\quad M_{fz} = 0$

b) ST



$0,4m = 40cm$

$20cm = 0,2m$

$A = 0,08m^2 \quad I_y = \frac{2}{1875} m^4 \quad I_z = \frac{1}{3750} m^4.$

$$\sigma = \frac{10.10^3}{0,08} + \frac{(-20.10^3)}{2/1875} . z \Rightarrow \sigma = 125000 - 18750000 y \text{ (em Pa)}$$

ou $\Rightarrow \sigma = 0,125 - 18,75 y$ (em MPa, y em m). 1,0

c) linha neutra: $\sigma = 0$:

$$0{,}125 - 18{,}75\bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{y} = {}^{1}/_{150}\, m \quad \text{ou} \quad \bar{y} = 0{,}67\, cm$$ 1,0

d) tensões máximas:

$$\sigma_T = \sigma(z = -0{,}2m) = 3{,}875\, MPa$$ 0,5

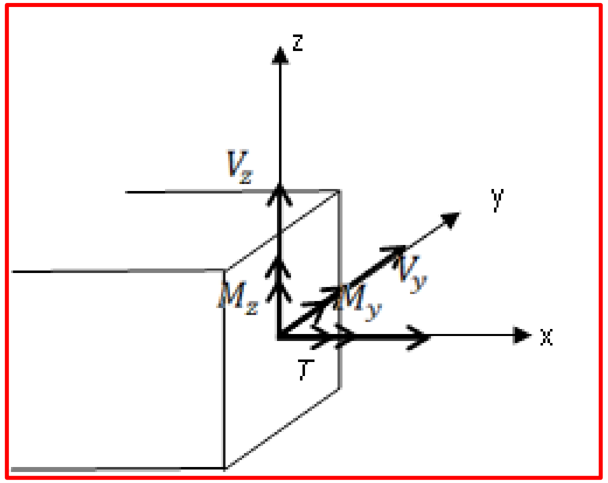
$$\sigma_C = \sigma(z = 0{,}2m) = -3{,}625\, MPa$$ 0,5

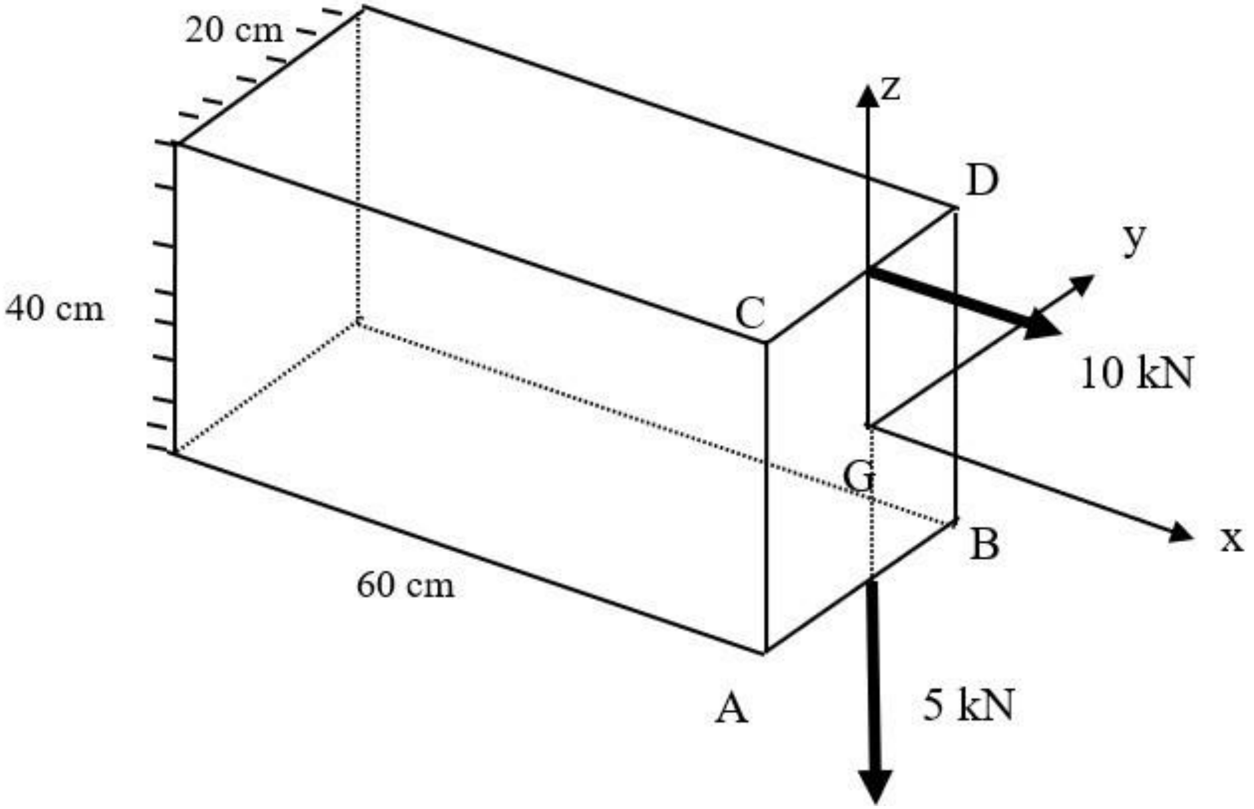
REC 2019

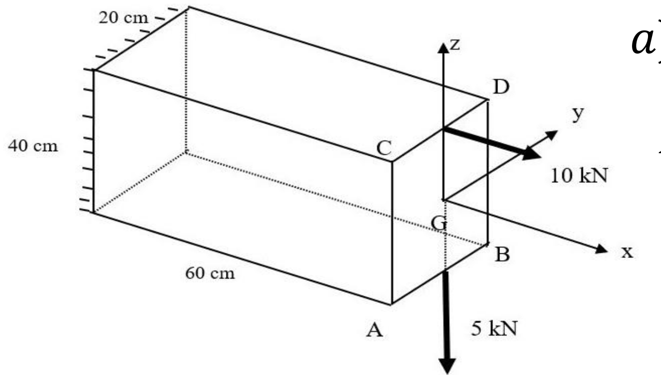
3ª. Questão (4 pontos): A viga em balanço de comprimento 60 cm de seção retangular da figura está submetida a uma força horizontal (direção do eixo x) de 10 kN e a uma força vertical (direção do eixo z) de 5 kN aplicadas na extremidade livre. Determine na seção do engastamento:

a) os esforços solicitantes,
b) a equação das tensões normais,
c) a equação da linha neutra,
d) as tensões normais máximas.

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z}$$

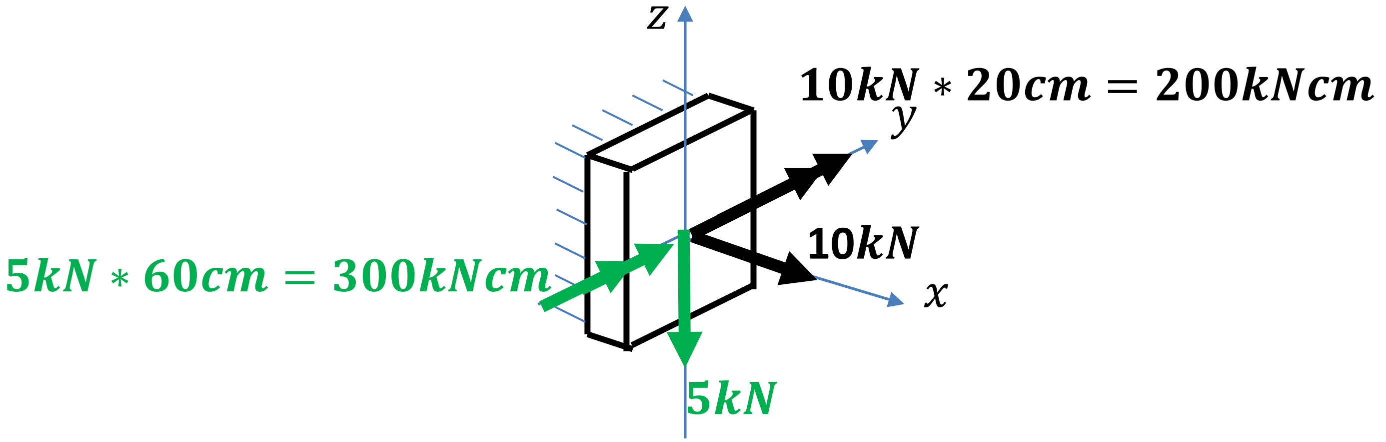






a) $N = 10kN;\ |V_z| = 5kN;\ |V_y| = 0;\ M_y = 500\ kNm; M_z = 0; T = 0;$

$$A = 20 * 40 = 800cm^2;\ I_y = \frac{20 * 40^3}{12} = 106667cm^4; I_z = \frac{40 * 20^3}{12} = 26667cm^4$$



b) $\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} * y + \frac{M_y}{I_y} * z \Longrightarrow \sigma_x = \frac{10}{800} - \frac{0}{26667} * y + \frac{500}{106667} * z \Longrightarrow \sigma_x = 0{,}0125 + 0{,}0047 * z\ (\frac{kN}{cm^2})$

c) $\sigma_x = 0 \Longrightarrow \sigma_x = 0{,}0125 + 0{,}0047 * z = 0 \Longrightarrow z = -2{,}66\ cm$

d) $\sigma_{máx,T}(z = +20cm) = 0{,}0125 + 0{,}0047 * 20 = 0{,}1065kN/cm^2$

$\sigma_{máx,C}(z = -20cm) = 0{,}0125 + 0{,}0047 * (-20) = -0{,}0815kN/cm^2$

Lista P2b

PEF 2308 – Fundamentos de Mecânica das Estruturas – Lista de Exercícios P2-B

(E4) Para a viga da figura abaixo com $A = 36\ cm^2$, $I_y = 204\ cm^4$, $I_z = 135\ cm^4$, Determine:

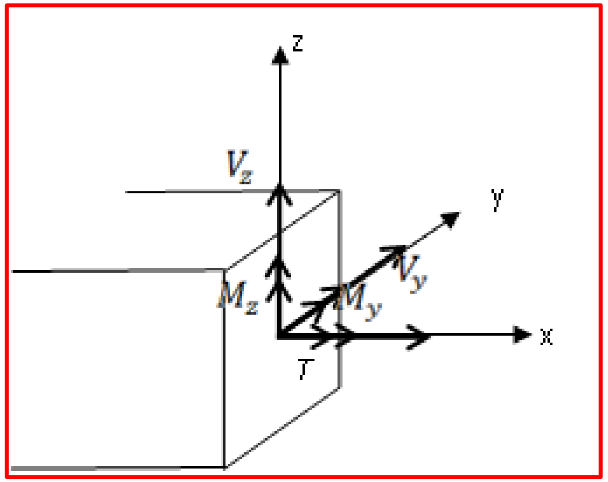
a)Os esforços solicitantes na seção mais solicitada;

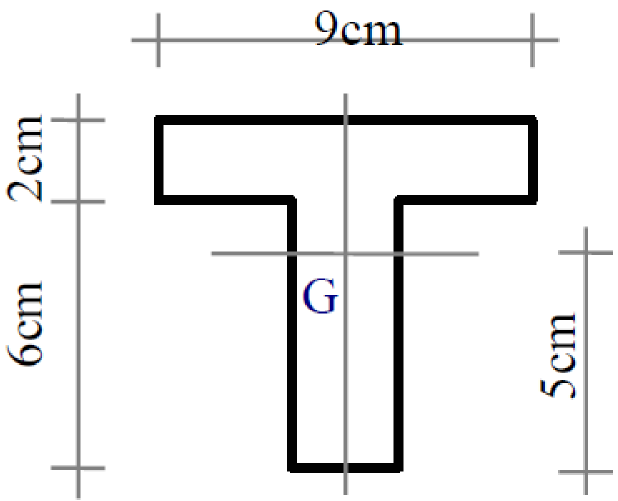
b)A expressão das tensões normais;

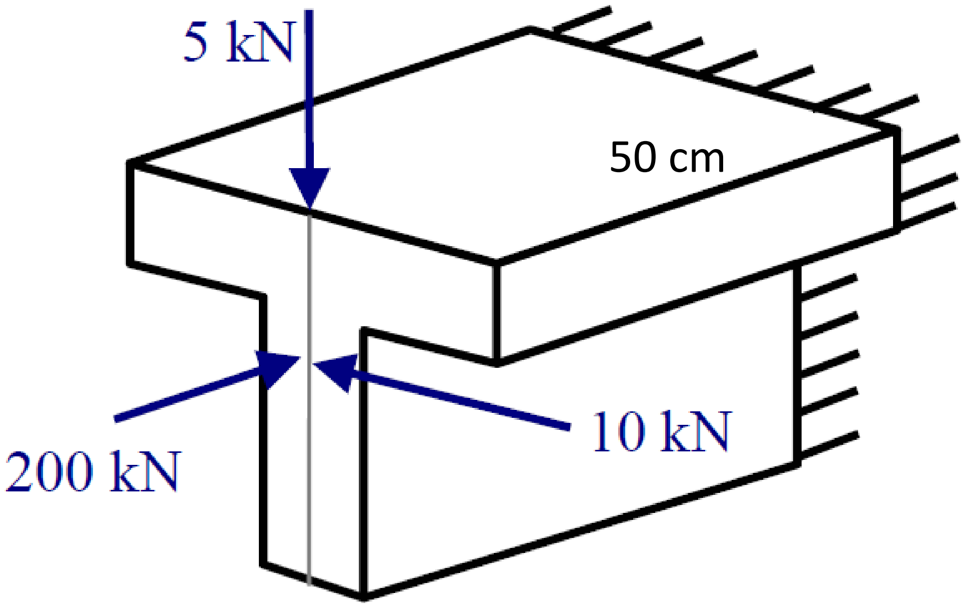
c)A posição da linha neutra;

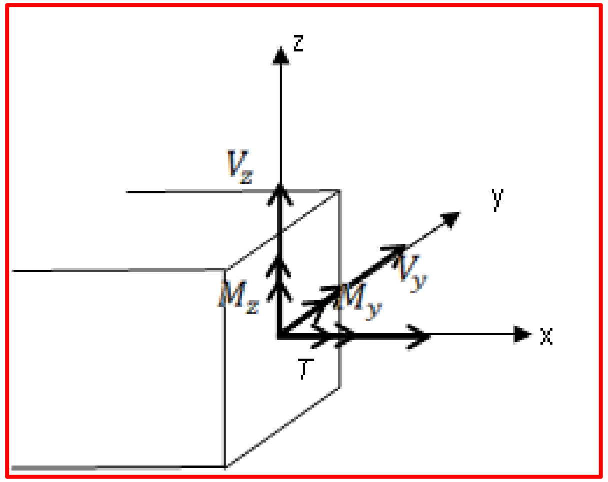
d)As tensões normais extremas (máxima e mínima).

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z}$$

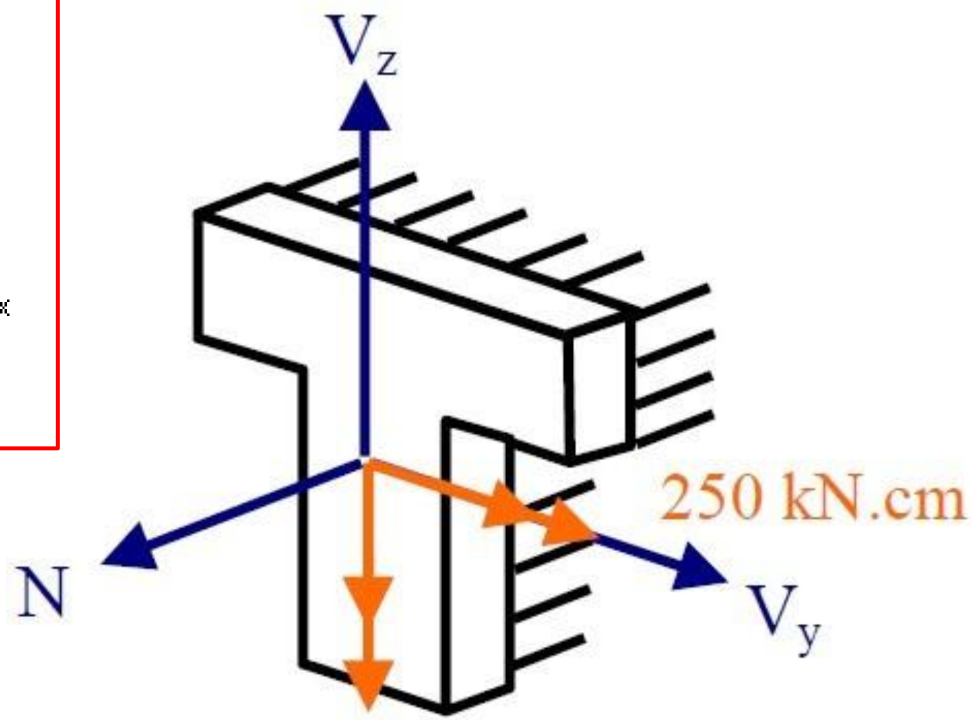


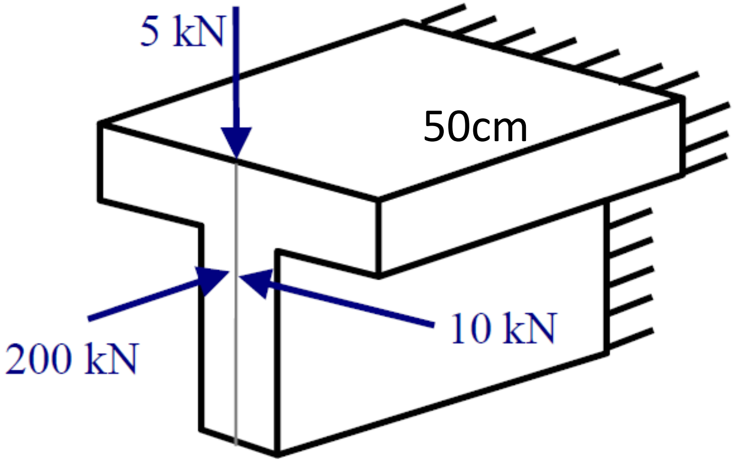






a) No engastamento temos:





$N = - 200$ kN

$V_y = -10$ kN

$V_z = -5$ kN

$M_y = 250$ kN.cm

$M_z = -500$ kN.cm

$T = 0$

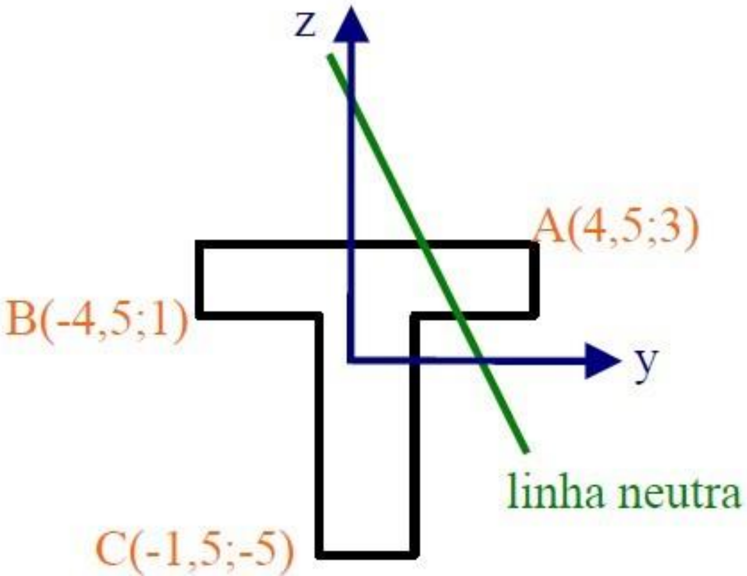
b) A tensão normal é dada por:

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

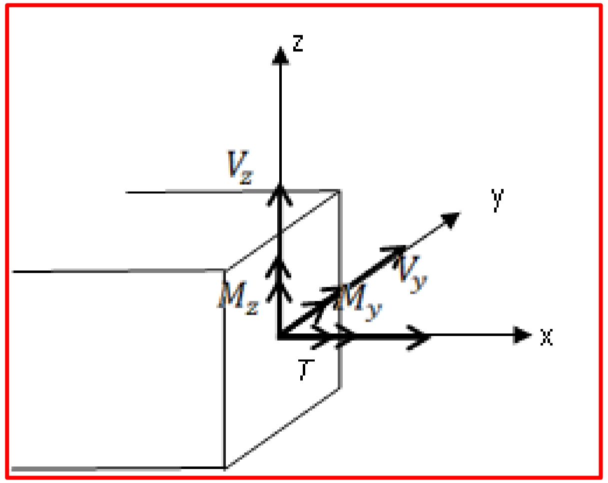
$$\sigma = -\frac{200}{36} - \frac{-500}{135} y + \frac{250}{204} z \quad \rightarrow \quad \sigma = -5,56 + 3,70\,y + 1,23\,z$$

c) A linha neutra é dada por:

$$\sigma = 0 \quad \rightarrow \quad -5.56 + 3,70\,y + 1,23\,z = 0 \quad \rightarrow \quad z = -3,01\,y + 4,52$$



$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z}$$



d) As tensões normais extremas são nos pontos A e (B ou C):

(TRAÇÃO)

$$\sigma_A^{(y=4,5;z=3)} = -5,56 + 3,70.4,5 + 1,23.3 = +14,78 \text{ kN.cm}^{-2}$$

(COMPRESSÃO)

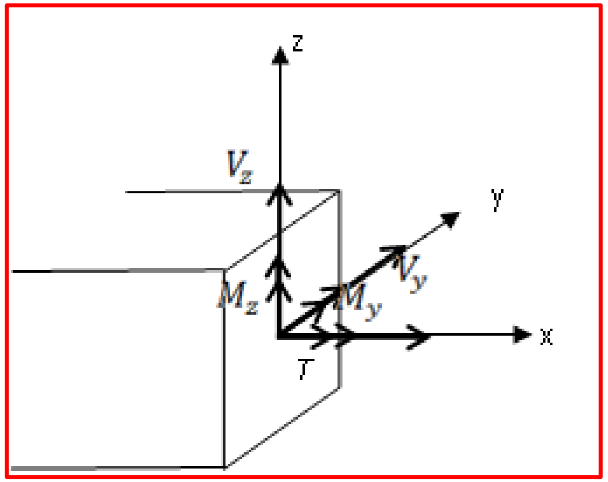
$$\sigma_B^{(y=-4,5;z=1)} = -5,56 + 3,70.(-4,5) + 1,23.1 = -20,98 \text{ kN.cm}^{-2}$$

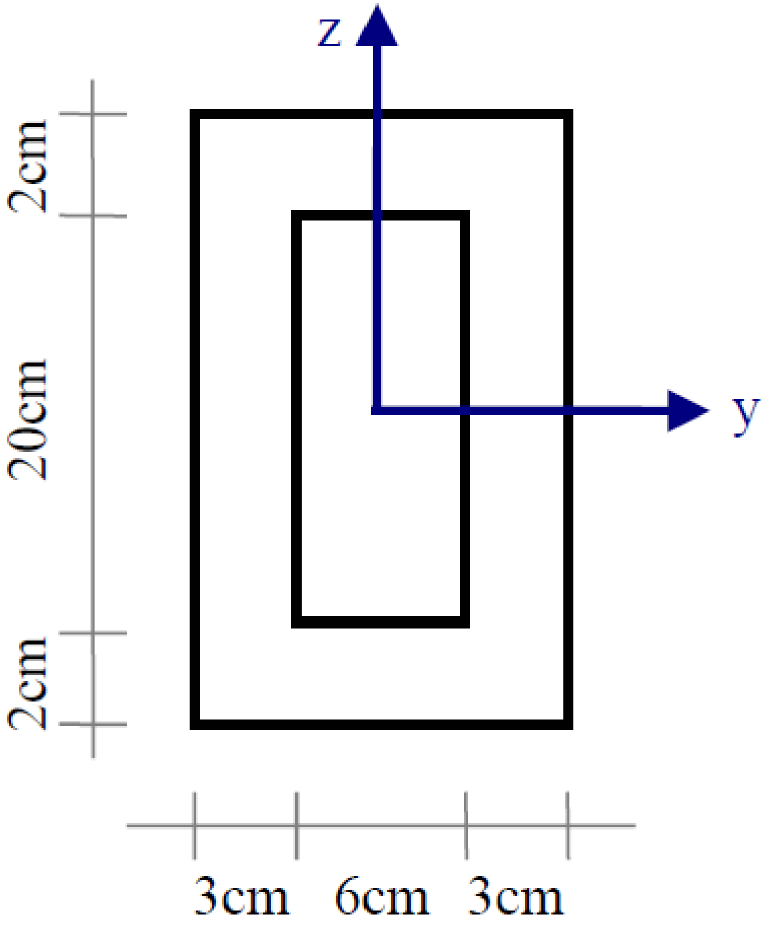
$$\sigma_C^{(y=-1,5;z=-5)} = -5,56 + 3,70.(-1,5) + 1,23.(-5) = -17,26 \text{ kN.cm}^{-2}$$

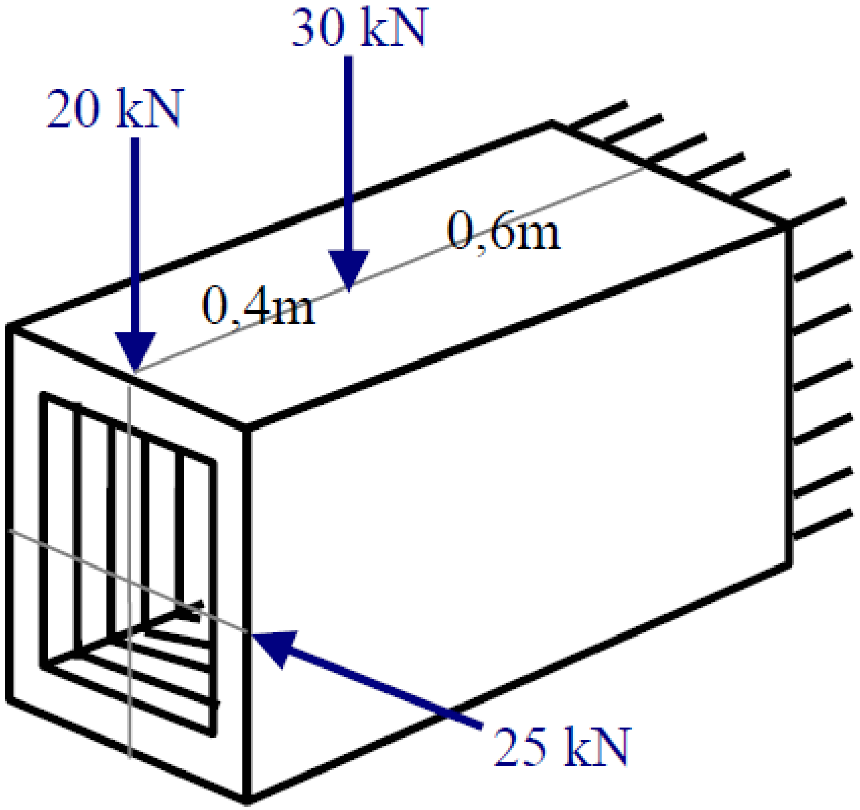
Lista P2b

(E5) Para a viga da figura abaixo, determine:
a)Os esforços solicitantes extremos;
b)Na seção mais solicitada, a posição da linha neutra;
c)As tensões normais extremas (máxima e mínima).

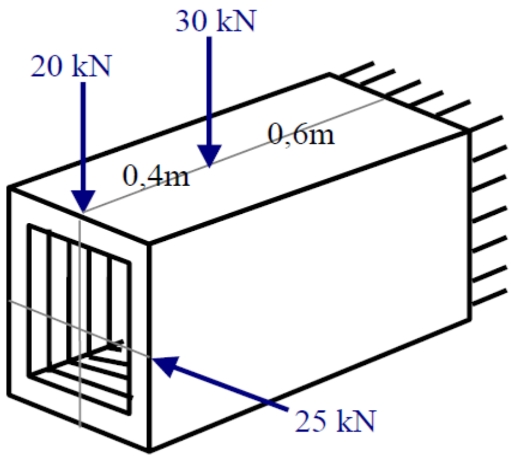
$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z$$

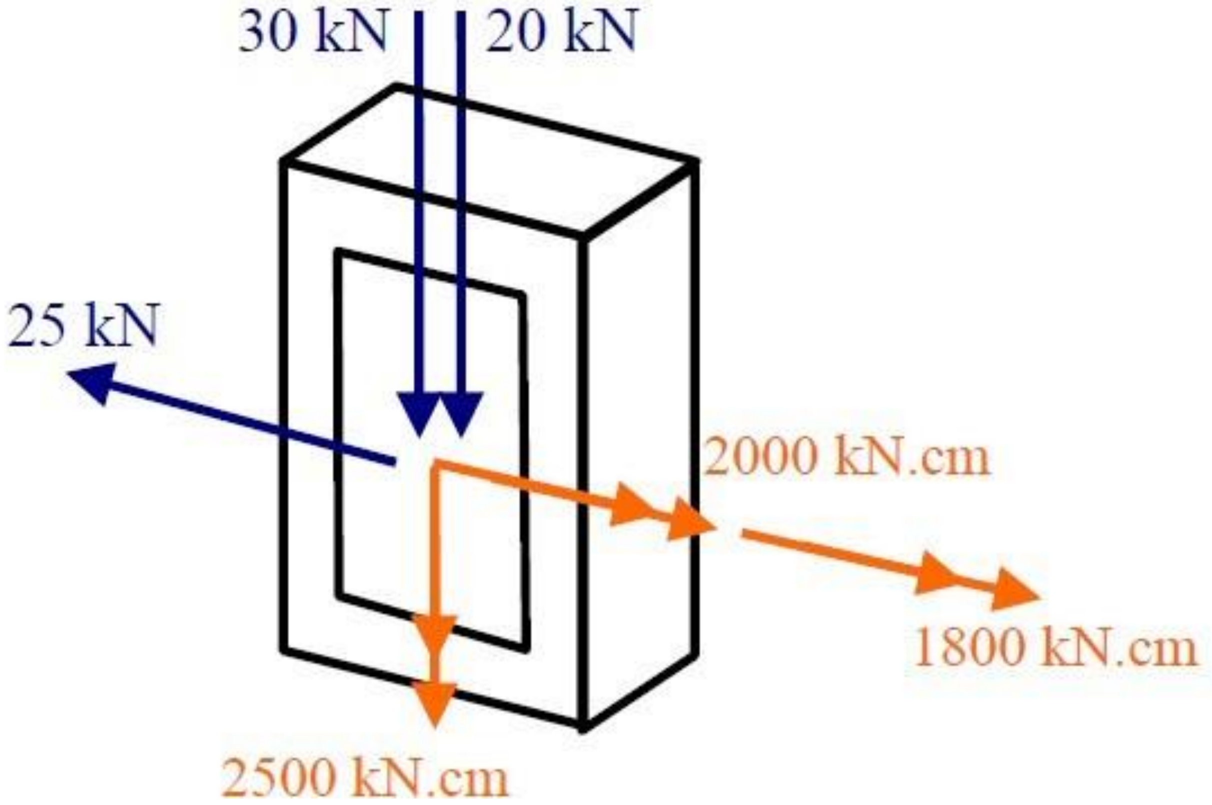






a) No engastamento temos:





$N = 0$ kN

$|V_y| = 25$ kN

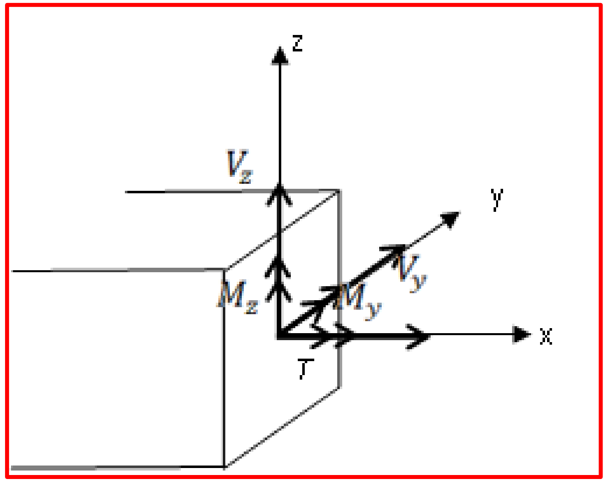
$|V_z| = 50$ kN

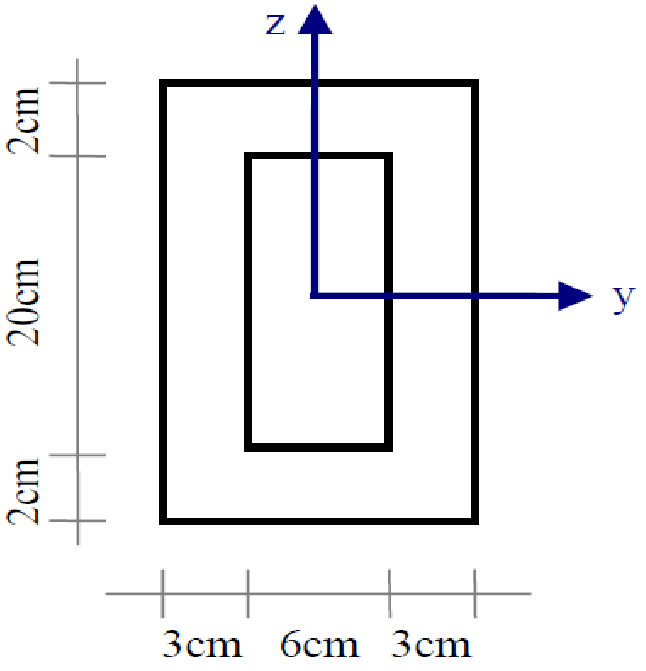
$M_y = 3800$ kN.cm

$M_z = -2500$ kN.cm

$T = 0$

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z}$$





b) Características da seção:

$$I_y = \left(\frac{b.h^3}{12}\right)_{\text{total-buraco}} = \frac{12.24^3}{12} - \frac{6.20^3}{12} = 9\,824\ \text{cm}^4$$

$$I_z = \left(\frac{h.b^3}{12}\right)_{\text{total-buraco}} = \frac{24.12^3}{12} - \frac{20.6^3}{12} = 3\,096\ \text{cm}^4$$

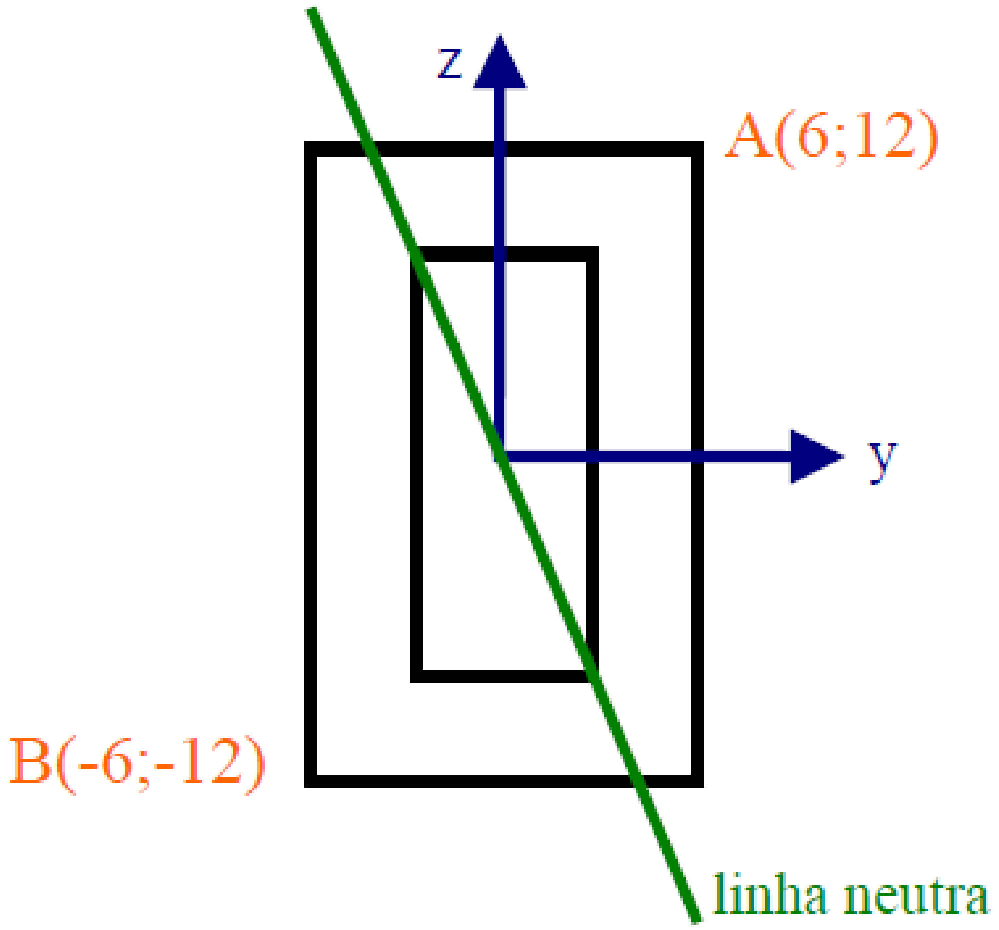
A tensão normal é dada por:

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

$$\sigma = 0 - \frac{2500}{3096} y + \frac{3800}{9824} z \quad \rightarrow \quad \sigma = 0{,}81\,y + 0{,}39\,z$$

A linha neutra é dada por:

$$\sigma = 0 \quad \rightarrow \quad 0,81\,y + 0,39\,z = 0 \quad \rightarrow \quad z = -2,08\,y$$



c) As tensões normais extremas são nos pontos A e B:

(TRAÇÃO)

$$\sigma_A^{(y=6;z=12)} = 0,81.6 + 0,39.12 = +9,54\ \text{kN.cm}^{-2}$$

(COMPRESSÃO)

$$\sigma_B^{(y=-6;z=-12)} = 0,81.(-6) + 0,39.(-12) = -9,54\ \text{kN.cm}^{-2}$$