MATEMÁTICA IV - 1º Semestre de 2023
3ª Prova

1. **Serão consideradas para a nota questões cujos valores somem no máximo 10.0 pontos.**
2. **Cada aluno pode fazer em casa questões cujos valores somem até 5.0 pontos.**

Questão 1 *(1.0)* Seja $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por $f(x, y) = -2b \sin xy - \cos xy$. O polinômio de Taylor de ordem 2 de f ao redor de $(\overline{x}, \overline{y}) = (\pi/2, 3)$ é

$$p(x, y) = A + B(x - \pi/2) + C(y - 3) + D(x - \pi/2)^2 + E(x - \pi/2)(y - 3) + F(y - 3)^2.$$

Preencha o quadro com os valores pedidos, e **justifique**.

$C =$	$E =$	$F =$

Questão 2 *(1.0)* Seja $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ dada por $f(x, y, z) = 2 + xyz + \sin^2 x - \cos y + e^{xz} + 3z^2$. Considere o ponto crítico $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = (0, 0, 0)$ de f. **Complete** a frase abaixo com "mínimo local", "máximo local", ou "sela", e **justifique**.

O ponto $\overline{x}$ é um ponto de ____________________ de f.

Questão 3 (1.5) **Complete** a frase abaixo, e **justifique usando Multiplicadores de Lagrange**:

O valor máximo da função $f(x, y, z) = 2x + 3y - 4z$ sujeita ao vínculo $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ é ____________________

Questão 4 *(1.5)* Considere o problema cuja incógnita é a função ψ.

$$\begin{cases} x \cos \psi(x, y) + \psi(x, y) \cos y = 0, \quad \forall (x, y) \in B_r(0, 0), \\ \psi \in C^1(B_r((0, 0))), \\ \psi(0, 0) = 0. \end{cases}$$

Complete as lacunas e **justifique**.

(a) Existe $r > 0$ tal que o problema acima tem solução? _______________

Sugestão: Analisar $f(x, y, z) = x \cos z + z \cos y$.

(b) Se o problema tiver solução então $J\psi(0, 0) =$ _______________

Questão 5 *(1.0)* Seja $T = \int_\alpha f.dr$ onde $f(x, y) = (2xy, x^2)$ e $\alpha(t) = (\sin t, \cos t), t \in [0, \pi/2]$ (isto é, T é o trabalho realizado pela força f para mover uma partícula ao longo da curva α, de $\alpha(0)$ até $\alpha(\pi/2)$).
Complete a frase abaixo, e **justifique**:

O valor de T é ____________________ .

Questão 6 *(1.0)* Um fio metálico, que dá uma volta na elipse de equação $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, está eletricamente carregado e sua densidade linear de carga é dada por $\rho(x, y) = x + 2|y|$.
Complete, e **justifique**:

A carga elétrica desse fio é ____________________

Questão 7 *(1.5)* **Mostre que** se $A \subset \mathbf{R}^n$ é compacto e enumerável, então A tem conteúdo nulo.

Questão 8 *(1.0)* Seja T o triângulo de vértices $(1, 0), (1, 2)$ e $(0, 2)$,
Complete a frase abaixo, e **justifique-a**:

A integral $\int\int_T (x + y) dA$ existe, e vale ____________________.

Questão 9 *(2.0)* Uma pirâmide R é limitada pelos três planos coordenados e pelo plano $x+y+3z=3$.
Justifique a afirmação (a), e **complete** as frases (b) e (c), e **justifique**.

(a) Existe $\int_R f(x,y,z)dV$, onde

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x,y,z) \in R \text{ e } x-1>0 \\ 0, & \text{se } (x,y,z) \in R \text{ e } x-1=0 \\ -1, & \text{se } (x,y,z) \in R \text{ e } x-1<0 \end{cases}$$

(b) $\int_R f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_c^{g(z)} \int_d^{h(x,z)} f(x,y,z)dydxdz$ onde

$a=$	$b=$	$c=$	$g(z)=$	$h(x,z)=$

(c) O valor de $\int_R f(x,y,z)dV$ é ____________________.

Questão 10 (1.0) Seja $S \subset \mathbf{R}^2$ é a região do primeiro quadrante delimitada pela circunferência de centro na origem e raio 1, e pelas retas $y=x$ e $y=\sqrt{2}\,x$.
Complete a frase abaixo, e **justifique usando coordenadas polares** $(x,y)=\Phi(u)$ onde $\Phi(u) = (u_1\cos u_2, u_1 \sin u_2)$:

$$\int_S x^2 dA = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

Questão 11 (1.5) Seja $\mathcal{S} \subset \mathbf{R}^3$ a superfície esférica de equação $x^2+y^2+z^2=1, z \geq 0$, orientada com normal unitária apontando para fora da esfera, e seja F o campo vetorial dado por $F(x,y,z)=(y,-x,z)$.
Complete a frase abaixo, e **justifique usando coordenadas esféricas** $(x,y,z)=\phi(u,v)$ onde $\phi(u,v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$:

O fluxo de F através de $\mathcal{S}$ resulta ____________________.

Questão 12 (2.0) Seja $f : [-1,1]\times[-1,1] \to \mathbf{R}$ definida por
$Sf(x,y) = \begin{cases} 2, & \text{se } |y| \geq |x| \\ 0, & \text{se } |y| < |x| \end{cases}$
Responda os ítens abaixo, e **justifique**:

(a) f é função escada? ____________________.

(b) f é integrável? ____________________.

(c) Se a resposta em (b) for afirmativa, o valor de $\int_{[-1,1]\times[-1,1]} f dA$ é ____________________.