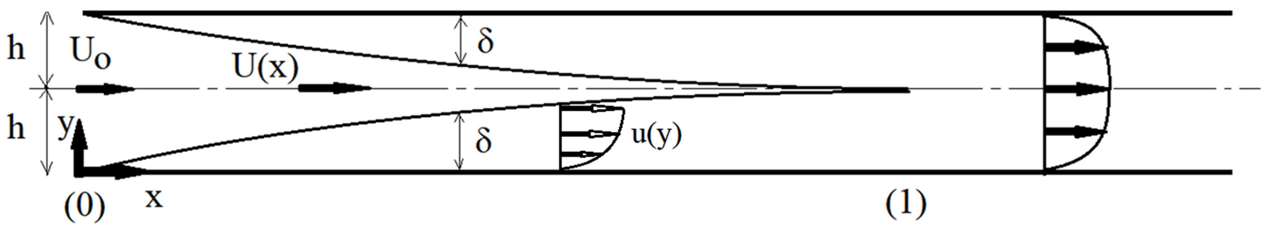
2ª Prova de Mecânica dos Fluidos II – PME3330   01/06/2023

Nome:____NUSP:__________

1ª Questão (2,0 pontos) – Uma camada limite se forma sobre um lado de uma placa plana de comprimento L paralela a uma corrente de fluido de massa específica ρ e velocidade U. Se θ_L é o valor da espessura de quantidade de movimento para $x = L$, escreva uma expressão para o coeficiente de arrasto C_D sobre um lado da placa como função de L e θ_L.

2ª Questão (2,0 pontos) – Duas placas planas paralelas são separadas por uma distância $2h$. Considere o escoamento permanente, bidimensional, com efeitos gravitacionais desprezíveis e incompressível de um fluido de propriedades físicas ρ e μ. Camadas limites se formam sobre as duas placas a partir de (0) em $x = 0$, onde temos um perfil uniforme de velocidade U_o. À medida que as camadas limites se desenvolvem, a velocidade externa às camadas limites U varia com x, ou seja, $U = U(x)$, até alcançar a posição (1) a partir da qual o escoamento se torna completamente desenvolvido, com as camadas limites se encontrando na linha de centro. Se para uma posição qualquer x entre (0) e (1) temos uma espessura de deslocamento δ^*, escreva U como função de U_o, h e δ^*. Dica: faça um balanço de vazões entre a seção (0) e a seção qualquer x.



3ª Questão (3,0 pontos) – Agora, usando a mesma figura do problema anterior, considere que as camadas limites são turbulentas. De acordo com o enunciado do problema anterior, a partir de (1) temos um escoamento completamente desenvolvido. Obtenha numa seção qualquer a partir da posição (1) o perfil de tensão total $\tau_{tot}(y)$ dado pela soma da tensão viscosa com a tensão turbulenta, ou seja:

$$\tau_{tot} = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} - \rho\, \overline{u'v'}$$

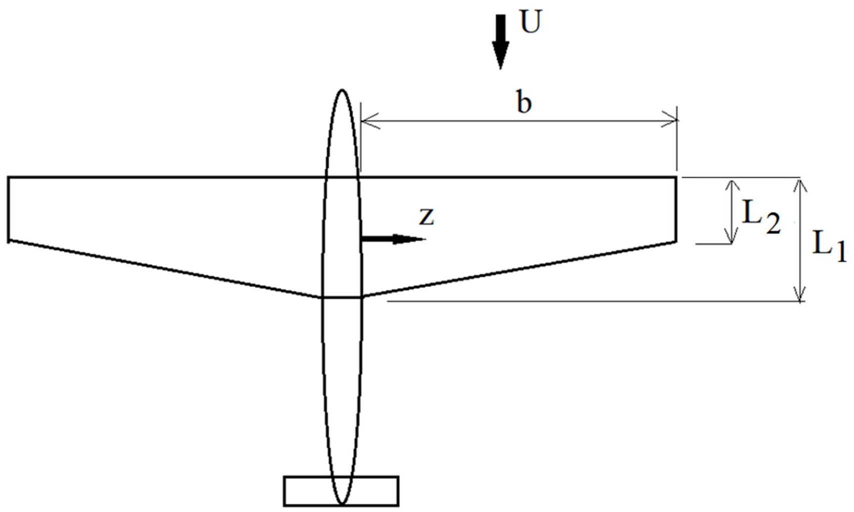
Esse perfil $\tau_{tot}(y)$ tem que ser função da velocidade de fricção na parede u^*, ρ, y e h.

Dica: da equação da camada limite turbulenta, considerando escoamento completamente desenvolvido mostre que o gradiente de pressão $d\bar{p}/dx$ é constante no escoamento. De um balanço de forças num elemento retangular de fluido expresse esse gradiente de pressão em função de ρ, u^* e h. Tomando a equação da camada limite turbulenta para escoamento completamente desenvolvido, substitua o gradiente de pressão e obtenha o perfil de tensão à partir da condição de contorno adequada para a tensão na parede em $y = 0$.

4ª Questão (3,0 pontos) – Uma aeronave tem uma asa de corda (distância entre bordo de ataque e bordo de fuga) variável dada por $L = \frac{(L_2 - L_1)z}{b} + L_1$, onde b é o comprimento da asa. A aeronave voa com velocidade U em ar com propriedades físicas ρ e ν. Considerando que a camada limite sobre a asa da aeronave é laminar e aproximando as asas por placas planas paralelas à corrente, obtenha uma expressão para a força de arrasto total sobre as duas asas F_x como função de ρ, U, ν, b, L_1 e L_2. Lembre-se que são duas asas, e que temos camada limite em ambos os lados de cada asa.

Dado: O coeficiente de arrasto sobre um lado de uma placa plana paralela à corrente com camada limite laminar é:

$C_D = \frac{K}{\sqrt{Re_L}}$ onde K é uma constante e $Re_L = \frac{U\,L}{\nu}$



Formulário

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \qquad \theta = \int_0^\delta \left[\frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right)\right] dy \qquad \frac{c_f}{2} = \frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{U}\frac{dU}{dx}\left(2 + \frac{\delta^*}{\theta}\right)$$

$c_f = \frac{\tau_o}{\frac{1}{2}\rho\, U^2}$ onde τ_o é a tensão na parede $\quad \tau_o = \rho u^{*2} \quad C_D = \frac{1}{L}\int_0^L c_f\; dx \quad F_x = \frac{1}{2}\,\rho\, U^2\, A\, C_D$

Equações da Camada Limite Turbulenta:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \qquad \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'}\right) \qquad \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0$$

Gabarito

1ª Questão (2,0 pontos) – Para uma placa plana paralela á corrente:

$$\frac{c_f}{2} = \frac{d\theta}{dx}$$

Da equação do coeficiente de arrasto para uma placa plana:

$$C_D = \frac{1}{L}\int_0^L c_f \; dx = \frac{1}{L}\int_0^L 2\,\frac{d\theta}{dx}dx = \frac{2}{L}(\theta_{x=L} - \theta_{x=0})$$

Como a espessura da camada limite é nula em $x = 0$, consequentemente as demais espessuras também são nulas. Assim, $\theta_{x=0} = 0$ e resulta:

$$C_D = \frac{2}{L}\,\theta_L$$

2ª Questão (2,0 pontos) – Fazendo um balanço de vazões entre a seção (0) e a seção qualquer x:

$$U_o \; 2h = U(2h - 2\delta) + 2\int_0^\delta u\,dy$$

Podemos escrever isso como:

$$U_o\,h = U\,h - \;U\int_0^\delta \; dy + \;\int_0^\delta u\,dy = U\,h - \;\int_0^\delta (U-u)dy = U\,h - U\int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right)dy$$

Logo:

$U_o\,h = U\,(h - \delta^*)$ que resulta $U = \dfrac{U_o}{1 - \frac{\delta^*}{h}}$

3ª Questão (3,0 pontos) – Para um escoamento completamente desenvolvido:

$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0$ logo, da equação da continuidade $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$ o que significa que $v = v(x)$.

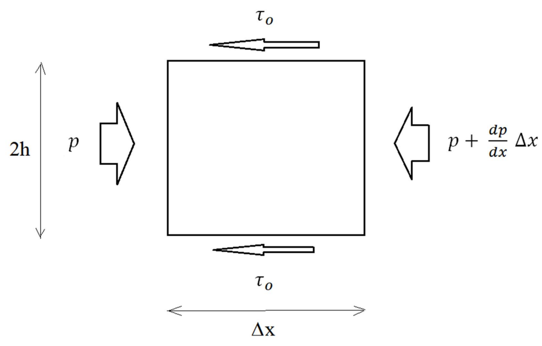
Porém, como $v = 0$ ao longo das paredes, isso significa $v = 0$ em todo o escoamento.

Como $\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0$ e $\bar{u} = \bar{u}(y)$, a equação da camada limite para um escoamento completamente desenvolvido, no qual não temos variações na direção x, resulta:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{d}{dy}\left(\frac{\mu}{\rho}\frac{d\bar{u}}{dy} - \overline{u'v'}\right) = 0$$

É fácil ver que desta última equação, da condição de escoamento completamente desenvolvido, resulta:

$\frac{d}{dx}\left(\frac{d\bar{p}}{dx}\right) = 0$ ou seja, o gradiente de pressão $\frac{d\bar{p}}{dx}$ é constante. Esse gradiente de pressão pode ser avaliado lembrando que podemos fazer um balanço de forças num elemento retangular de fluido, pois não temos aceleração no escoamento completamente desenvolvido. Lembrando que temos uma tensão τ_o nas paredes, um elemento retangular de altura $2h$ e comprimento Δx estará submetido às forças:



$$p\,2h - \left(p + \frac{dp}{dx}\,\Delta x\right)2h - 2\,\tau_o\,\Delta x = 0$$

O que resulta:

$$\frac{d\bar{p}}{dx} = -\frac{\tau_o}{h} = -\rho\frac{u^{*2}}{h}$$

Retornando à equação da camada limite:

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\mu}{\rho}\frac{d\bar{u}}{dy} - \overline{u'v'}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{d\bar{p}}{dx} = -\frac{u^{*2}}{h}$$

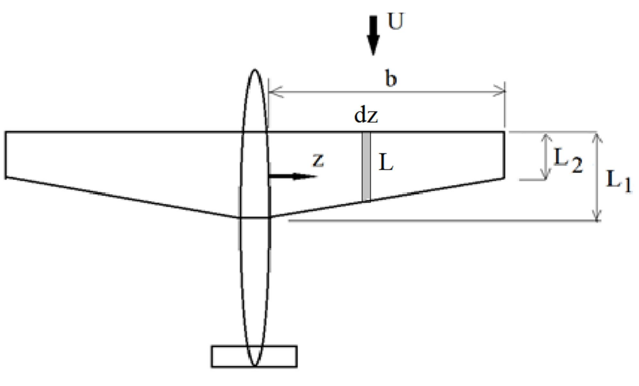
Integrando, a tensão total resulta:

$$\mu\frac{d\bar{u}}{dy} - \rho\,\overline{u'v'} = -\rho\frac{u^{*2}}{h}\,y + Const$$

Na parede, para $y = 0$, a tensão turbulenta é nula e a tensão viscosa é $\mu\frac{d\bar{u}}{dy}\Big|_{y=0} = \rho\,u^{*2} = Const.$ Logo:

$$\tau_{tot} = \mu\frac{d\bar{u}}{dy} - \rho\,\overline{u'v'} = \rho u^{*2}\left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

4ª Questão (3,0 pontos) – Um elemento retangular de largura dz e comprimento L pode ser considerado como uma placa plana paralela à corrente, com uma força de arrasto dF_x dada por:



$$dF_x = \frac{1}{2}\rho\,U^2\,Ldz\,C_D = \frac{1}{2}\rho\,U^2\,Ldz\,\frac{K}{\left(\frac{UL}{\nu}\right)^{1/2}}$$

Isso resulta:

$$dF_x = \frac{K}{2} \rho\, \nu^{1/2}\, U^{3/2}\, L^{1/2} dz$$

Substituindo a expressão de L:

$$dF_x = \frac{K}{2} \rho\, \nu^{1/2}\, U^{3/2} \left(\frac{L_2 - L_1}{b}\, z + L_1 \right)^{1/2} dz$$

Lembrando que temos duas asas com dois lados, a força total de arrasto resulta:

$$F_x = 2K\, \rho\, \nu^{1/2}\, U^{3/2} \int_0^b \left(\frac{L_2 - L_1}{b}\, z + L_1 \right)^{1/2} dz$$

Integrando:

$$F_x = 2K\, \rho\, \nu^{1/2}\, U^{3/2} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{L_2 - L_1}{b}\, z + L_1 \right)^{3/2} \frac{b}{L_2 - L_1} \right]_0^b$$

Isso vai resultar:

$$F_x = \frac{4}{3} K\, \rho\, \nu^{1/2}\, U^{3/2}\, \frac{b}{L_2 - L_1} \left({L_2}^{3/2} - {L_1}^{3/2} \right)$$