Gabarito da Lista de Exercícios de SMA0301-Cálculo I - Módulo 5

Última atualização em 29/05/2023

Exercício 1 (a) *A regra de L'Hôpital pode ser aplicada em indeterminações do tipo* $\frac{0}{0}$ *ou* $\frac{\infty}{\infty}$*. Podemos manipular as seguintes indeterminações para aplicar a regra de L'Hôpital*

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

(b) *Podemos aplicar a regra de L'Hôpital diretamente sem nenhuma manipulação nas indeterminações*

$$\frac{0}{0} \ e \ \frac{\infty}{\infty}$$

(c) *Como* $\lim_{x\to 0}\cos(x) = 1$ *e* $\lim_{x\to 0}\sin(x) = 0$ *não podemos manipular a função para obter uma indeterminação do tipo* $\frac{0}{0}$ *ou* $\frac{\infty}{\infty}$*, portanto, não podemos aplicar a regra de L'Hôpital*

(d) $\frac{0}{0}$: $\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}$*. Note que*

$$\lim_{x\to 0} x - \operatorname{sen} x = 0 \ \ e \ \lim_{x\to 0} x^3 = 0$$

Aplicando L'Hopital, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\tfrac{x-\operatorname{sen} x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\tfrac{(x-\operatorname{sen} x)'}{(x^3)'}\\ &= \lim_{x\to 0}\tfrac{1-\cos x}{3x^2} \quad (= 0/0, \text{ aplicamos novamente L'Hopital})\\ &= \lim_{x\to 0}\tfrac{\operatorname{sen} x}{6x} = 1/6 \qquad \Big(\text{usando } \lim_{x\to 0}\tfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1\Big)\end{aligned}$$

$\frac{\infty}{\infty}$: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$*. Temos*

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad e \qquad \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

Então, pela Regra de L'Hospital, vale

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1} = +\infty$$

$0\cdot\infty$: *No caso* $0\cdot\infty$ *também podemos aplicar regras de L'Hopital, após uma manipulação conveniente das funções no limite.*

Suponhamos que $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$ *é indeterminado na forma* $0\cdot\infty$*, isto é,* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$*. Neste caso, primeiramente fazemos*

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{1/g(x)} = 0/0$$

e então, aplicando L'Hopital, calculamos

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{(1/g(x))'}$$

ou então

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{1/f(x)} = \infty/\pm\infty$$

e então, por L'Hopital, calculamos

$$\lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{(1/f(x))'}$$

Exemplo: *Calcular* $\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x$. *Temos* $\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x = 0\cdot(-\infty)$. *Recorde-se que* $\lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$. *Neste caso, fazemos*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \quad (= -\infty/+\infty)\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0\end{aligned}$$

$\infty-\infty$: $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{sen}(x)}\right)$. *Observe que temos uma indeterminação da forma* $\infty-\infty$. *Escrevendo*

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{sen}(x)}\right) = \frac{\mathrm{sen}(x)-x}{x\,\mathrm{sen}(x)},$$

obtemos uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$ *e podemos aplicar a Regra de L'Hospital para obtermos*

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{sen}(x)}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{sen}(x)-x}{x\,\mathrm{sen}(x)} \overset{L'H'H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(x)-1}{\mathrm{sen}(x)+x\cos(x)}.$$

Agora, estamos novamente com uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$. *Aplicando, de novo, a Regra de L'Hospital, temos*

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(x)-1}{\mathrm{sen}(x)+x\cos(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\,\mathrm{sen}(x)} = 0$$

Suponhamos que o limite $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ *tem uma das formas indeterminadas* $0^0, \infty^0$ *ou* 1^∞. *Aqui deveremos ter* $f(x) > 0$ *no domínio da função* f^g. *Em qualquer um desses casos, fazemos*

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$$

e então

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^L$$

sendo

$$L = \lim_{x\to a}[g(x)\cdot\ln f(x)]$$

Para as formas indeterminadas $0^0, \infty^0$ *e* 1^∞, *o limite* $L = \lim_{x\to a}[g(x)\cdot\ln f(x)]$ *terá sempre a forma indeterminada* $0\cdot\infty($ *ou* $\infty\cdot 0)$, *e recaímos então em um caso anteriormente estudado.*

0^0: $\lim_{x\to 0+} x^x$. *Aqui temos uma indeterminação* 0^0. *Seguindo procedimento descrito acima, fazemos*

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

e então $\lim_{x\to 0^+} x^x = e^L$, *sendo* $L = \lim_{x\to 0^+} x \ln x$. *Como calculado no exemplo anterior,* $L = 0$ *e portanto* $\lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$

∞^0: $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$. *Observe que é uma indeterminação da forma* ∞^0. *Escrevemos*

$$x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{\ln x}{x}}.$$

Como a função exponencial é contínua, temos

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = \exp\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}\right).$$

Observe que, agora, temos uma indeterminação da forma $\frac{\infty}{\infty}$. *Pela Regra de L'Hospital, obtemos*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{[\ln(x)]'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Logo,

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

1^∞: $\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen}(2x))^{1/x}$. *Aqui temos uma indeterminação* 1^∞. *Fazemos* $(1+\operatorname{sen}(2x))^{1/x} = e^{\ln(1+\operatorname{sen}(2x))^{1/x}} = e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(1+\operatorname{sen}(2x))}$. *Então* $\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen}(2x))^{1/x} = e^L$, *sendo*

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cdot\ln(1+\operatorname{sen}(2x)) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\operatorname{sen}(2x))}{x} \qquad (= 0/0).$$

Aplicando L'Hopital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\operatorname{sen}(2x))}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{[\ln(1+\operatorname{sen}(2x))]'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\operatorname{sen}(2x)}\cdot 2\cos(2x) = 2$$

Portanto $\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen}(2x))^{1/x} = e^2$.

Exercício 2 (a) *Dada a indeterminação* $0/0$, *usamos a Regra de L'Hôpital e temos*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\ln(\cos(x))} = \lim_{x\to 0} -\frac{2x\cos(x)}{\operatorname{sen}(x))} = -2,$$

onde a última igualdade sai do limite trigonométrico fundamental.

(b) *Dada a indeterminação* $-\infty/-\infty$, *usamos a Regra de L'Hôpital e temos*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen}(x))}{\ln(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = 1,$$

pelo mesmo argumento que no item (a).

(c) *Dada a indeterminação 0/0, usamos a Regra de L'Hôpital e temos*

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln(x)-(x-1)}{(x-1)\ln(x)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln(x)+1-\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-x}{x\ln(x)+x-1}\right).$$

Observando que tem-se a indeterminação 0/0 de novo, usamos a Regra de L'Hôpital e temos

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{-1}{\ln(x)+1+1}\right)=-\frac{1}{2}.$$

(d) *Observe que* $\lim_{x\to 1}(x-1)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{\cot\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$*, onde temos a indeterminação 0/0. Assim, usamos a Regra de L'Hôpital e temos*

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\cot\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=\lim_{x\to 1}-\left(\frac{2}{\pi}\right)\frac{1}{\csc\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=-\frac{2}{\pi}.$$

(e) *Dada a indeterminação 0/0, usamos a Regra de L'Hôpital e temos*

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2-1}\right)}{\ln(x+3\sqrt{x^2-1})}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cos\left(\sqrt{x^2-1}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)}{\frac{1+\frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+3\sqrt{x^2-1}}}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{x\cos\left(\sqrt{x^2-1}\right)(x+3\sqrt{x^2-1})}{3x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{3}.$$

(f) *Observemos que* $\lim_{x\to+\infty}x^3\left(\arctan(x)-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\arctan(x)-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^3}}$ *e notamos a indeterminação 0/0. Assim, usamos a Regra de L'Hôpital e temos*

$$\lim_{x\to+\infty}x^3\left(\arctan(x)-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{3}{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{3(x^2)(x^2+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{3}.$$

(g) *Dada a indeterminação 0/0, usamos a Regra de L'Hôpital e temos*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi 3^x)}{x}=\lim_{x\to 0}\pi\ln(3)3^x\cos(\pi 3^x)=-\pi\ln 3.$$

(h) *Dada a indeterminação 0/0, usamos a Regra de L'Hôpital e temos*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\operatorname{sen}(x))}{\operatorname{sen}(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{(1+\operatorname{sen}(x))2\cos(2x)}=\frac{1}{2}.$$

(i) *Observemos que* $\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln((e^x+x)^{\frac{1}{x}})}$. *Como a função exponencial é contínua, basta calcular o limite* $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)\ln(e^x+x)$ *e logo aplicar a função exponencial ao limite obtido. Assim,* $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)\ln(e^x+x) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x+1}{(e^x+x)} = 2$. *Logo,* $\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}} = e^2$.

(j) *Observemos que não podemos aplicar a Regra de L'Hôpital em* $\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x)}{\ln(x)}$ *pois não temos nenhuma das indeterminações conhecidas. O limite não existe pois* $\lim_{x\to 1^-}\frac{\operatorname{sen}(x)}{\ln(x)} = -\infty$ *e* $\lim_{x\to 1^+}\frac{\operatorname{sen}(x)}{\ln(x)} = +\infty$.

Exercício 3 (a) *Vamos calcular os limites laterais de quando* $x\to 0$. *Então, fazendo a mudança de variável* $\frac{1}{x} = u$ *temos que se* $x\to 0^-$ *temos* $u\to-\infty$, *logo*

$$\lim_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{u\to-\infty} e^{-u^2} = \lim_{u\to-\infty}\frac{1}{e^{u^2}} = 0.$$

Analogamente, provamos que $\lim_{x\to 0^+} = 0$. *Defina,* $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ *se* $x\neq 0$ *e* $f(0) = 0$. *Portanto, estendemos* f *por continuidade.*

Agora, utilizando a definição de derivada e calculando o limite,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}.$$

Fazendo, $u = \frac{1}{x}$ *temos que se* $x\to 0$ *então* $u\to\pm\infty$. *Logo,* $\lim_{u\to\pm\infty}\frac{e^{-u^2}}{\frac{1}{u}} = \lim_{u\to\pm\infty}\frac{u}{e^{u^2}}$. *Note que, temos indeterminação do tipo* $\frac{-\infty}{\infty}$, *aplicando L' Hôspital, segue que*

$$\lim_{u\to\pm\infty}\frac{u}{e^{u^2}} = \lim_{u\to\pm\infty}\frac{1}{2ue^{u^2}} = 0.$$

Portanto, f *é diferenciável.*

(b) *Note que temos uma indeterminação do tipo* $\frac{0}{0}$ *no limite,* $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x^4-x^2)}{x}$, *por L'Hôspital, segue que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x^4-x^2)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{4x^3-2x}{1+(x^4-x^2)^2} = 0.$$

Basta definir, $g(0) = 0$ *e assim* g *é contínua. Para a diferenciabilidade, aplicamos L'Hôspital duas vezes no limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x^4-x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{4x^3-2x}{2x(1+(x^4-x^2))} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2-1}{(1+(x^4-x^2))} = \frac{-1}{1} = -1.$$

Portanto, g *é diferenciável.*

(c) *Vamos calcular os limites laterais, obtemos que se* $x \to 0^+$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\log(|x|)}{\dfrac{1}{x^2}}$ *que é uma indeterminação do tipo* $\dfrac{\infty}{\infty}$. *Por L'Hôspital, segue que*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(|x|)}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^3}{2x\ln(10)} = 0.$$

Defina, $h(0) = 0$. *Por definição de diferenciabilidade, fazendo por limites laterais*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2\log(|x|)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log(|x|)}{\dfrac{1}{x}}.$$

Por L'Hôspital,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(|x|)}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x\ln(10)}}{-\dfrac{2}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{x}{2\ln(10)} = 0.$$

Para o outro limite lateral, também teremos zero pois obtemos $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x}{2\ln(10)} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{2\ln(10)}$, *como o limite existe, então* h *é diferenciável.*

(d) *Para* $x \to 0^+$ *segue que* $x^x = e^{x\ln(x)}$, *logo* $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{\dfrac{1}{x}}$, *indeterminação do tipo* $\dfrac{\infty}{\infty}$, *logo*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0.$$

Analogamente, para $x \to 0^-$*segue,* $(-x)^x$, *seguindo os mesmos passos* $\lim\limits_{x \to 0^-} (x) = 0$. *Em ambos os casos, temos*

$$\lim_{x \to 0} = e^0 = 1.$$

Basta definir, $u(0) = 1$ *e assim* f *é contínua. Para a diferenciabilidade, por definição* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x\ln(x)} - 1}{x}$, *uma indeterminação do tipo* $\dfrac{0}{0}$, *logo* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x\ln(x)} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} e^{x\ln(x)}(\ln(x) + 1) = -\infty$, *portanto* f *não é diferenciável em* 0.

Exercício 4 (a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + 1}{4x^3 - x - 3} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2}{12x^2 - 1} = \dfrac{3}{11}$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{sen}(x)}{2x} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{sen}(x)}{x} = \dfrac{1}{2}$

(c) $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{2x} = \frac{1}{4}$

(d) $\lim_{t\to 0} \frac{sen(t^2)}{t} = \lim_{t\to 0} = \frac{2t\cos(t^2)}{1} = 0$

(e) $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\theta-\pi}{\cos(2\pi-\theta)} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{2}{-1(-sen(2\pi-\theta))} = -2$

(f) $\lim_{\theta\to 0} \frac{3^{sen(\theta)}-1}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{3^{sen(\theta)}\cos(\theta)\ln 3}{1} = \ln 3$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{x2^x}{2^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{2^x+(2^x\ln(2))x}{2^x\ln 2} = \lim_{x\to 0} \frac{2^x(1+x\ln 2)}{2^x\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$

Exercício 5 (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x}{x^3+x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x+3}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{6x} = 0$

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-2x}{7x^3+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{15x^2-2}{21x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{30x}{42x} = \frac{30}{42} = \frac{5}{7}$

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\log_2 x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} \frac{1}{\frac{1}{x\ln 2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\ln 2}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln 2}{1} = \ln 2$

Exercício 6 (a) $\lim_{x\to 0^+} x(\ln(x))^2 = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln(x))^2}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{((\ln(x))^2)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2\ln(x)}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$
$\lim_{x\to 0^+} -2x\ln(x) = -2\cdot \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = -2\cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = -2\cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln(x))'}{(\frac{1}{x})'} = -2\cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$
$-2 \cdot \lim_{x\to 0^+} -x = 0.$

(b) $\lim_{x\to 0^+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0^+} e = \exp[\lim_{x\to 0^+} x\ln(1+\frac{1}{x})] = \exp[\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}] \overset{L.H.}{=} \exp[\lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x(x+1)}}{-\frac{1}{x^2}}] =$
$\exp[\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x+1}] = \exp(0) = 1.$

(c) $\lim_{x\to\infty} (\ln(x))^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \exp[\frac{1}{x}\ln((\ln(x)))] = \exp[\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{x}] = \exp[\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln(x)))'}{(x)'}] =$
$\exp[\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x\ln(x)}}{1}] = \exp[\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\ln(x)}] = e^0 = 1.$

(d) $\lim_{x\to\infty} (1+2x)^{\frac{1}{2\ln(x)}} = \lim_{x\to\infty} \exp[\frac{1}{2\ln(x)}\ln(1+2x)] = \exp[\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\ln(x)}\ln(1+2x)] =$
$\frac{1}{2}\cdot\exp[\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+2x)}{\ln(x)}] = \frac{1}{2}\cdot\exp[\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(1+2x))'}{(\ln(x))'}] = \frac{1}{2}\cdot\exp[\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{1+2x}}{\frac{1}{x}}] = \frac{1}{2}\cdot\exp[\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1+2x}] =$
$\exp[\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+2x}] = \exp[\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}+2}] = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$

(e) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x+2})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \exp[\frac{1}{x}\ln(\frac{x^2+1}{x+2})] = \exp[\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\frac{x^2+1}{x+2})}{x}] = \exp[\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln(\frac{x^2+1}{x+2}))'}{x'}] = \exp[\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+4x-1}{(x^2+1)(x+2)}}{1}] = \exp[\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x-1}{(x^2+1)(x+2)}] = \exp[\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{4x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}}{x+2}] = \exp[\frac{1}{\infty}] = e^0 = 1.$

(f) $\lim_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{1-x}\ln(x)} = \exp[\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{1-x}\ln(x)] = \exp[\lim_{x\to 1^+}\frac{(\ln(x))'}{(1-x)'}] = \exp[\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}}{-1}] = e^{-1} = \frac{1}{e}.$

(g) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{e^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\ln(x+1)}{\ln(1+x)(e^x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-\ln(x+1))'}{(\ln(1+x)(e^x-1))'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-\frac{1}{x+1}}{\frac{e^x-1}{x+1}+e^x\ln(x+1)} \overset{\text{L.H.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x+\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{xe^x+1}{(x+1)^2}+e^x\ln(1+x)+\frac{e^x}{x+1}} = 1.$

(h) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos(x)} - \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos(x)}(1-\frac{1-\cos(x)}{x^2}) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos(x)}\cdot\lim_{x\to 0} 1-\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos(x)}\cdot(\lim_{x\to 0} 1 - \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos(x)}\cdot(1-\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))'}{(x^2)'}) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos(x)}\cdot(1-\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2x}) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos(x)}\cdot(1-\lim_{x\to 0}\frac{(\sin(x))'}{(2x)'}) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos(x)}\cdot(1-\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{2}) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos(x)}\cdot(1-\frac{1}{2}) = \infty\cdot\frac{1}{2} = \infty.$

Exercício 7 *(a)* $\lim_{x\to a^+}\frac{\cos a\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)} = \underbrace{\lim_{x\to a^+}\cos a}_{=\cos a}\lim_{x\to a^+}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$

$$\underbrace{=}_{L'Hospital} \cos a\lim_{x\to a^+}\frac{e^x-e^a}{x-a}\frac{1}{e^x} = \cos a\underbrace{\lim_{x\to a^+}\frac{e^x-e^a}{x-a}}_{=e^a}\underbrace{\lim_{x\to a^+}\frac{1}{e^x}}_{1/e^a} = \cos a.$$

(b) $\lim_{x\to\infty} x-\ln x = \lim_{x\to\infty} x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right) = \infty$, *pois* $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\underbrace{=}_{por\ L'Hospital}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0.$

Exercício 8 *Lembremos que o polinômio de Taylor de* f *de grau* n *em torno de* x_0 *é dado por*

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

(a) $f(x) = \sqrt[k]{x} = x^{\frac{1}{k}} \implies f(1) = 1;$

$f'(x) = \frac{x^{\frac{1}{k}-1}}{k} = \frac{x^{\frac{1-k}{k}}}{k} \implies f'(1) = \frac{1}{k};$

$f''(x) = \frac{(1-k)x^{\frac{1-k}{k}-1}}{k^2} = \frac{(1-k)x^{\frac{1-2k}{k}}}{k^2} \implies f''(1) = \frac{(1-k)}{k^2};$

Portanto,

$$p_2(x) = 1 + \frac{1}{k}(x-1) + \left(\frac{1-k}{2k^2}\right)(x-1)^2.$$

(b) $f(x) = \ln(1+x) \implies f(0) = 0;$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} \implies f'(0) = 1;$

$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \implies f''(0) = -1;$

$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \implies f'''(0) = 2;$

Portanto,

$$p_3(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

(c) $f(x) = \cos(x) \implies f(0) = 1;$

$f'(x) = -\text{sen}(x) \implies f'(0) = 0;$

$f''(x) = -\cos(x) \implies f''(0) = -1;$

$f'''(x) = \text{sen}(x) \implies f'''(0) = 0;$

Note que essa sequência começará a se repetir. Dividindo n *por 2, escrevemos* $n = 2k$ *(caso* n *seja par), ou* $n = 2k+1$ *(caso* n *seja ímpar), portanto*

$$p_n(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}.$$

(d) $f(x) = x^x \implies f(1) = 1;$

$f'(x) = x^x(\ln x + 1) \implies f'(1) = 0;$

Portanto,

$$p_1(x) = 1 + (x-1).$$

(e) $f(x) = e^{x^2} \implies f(0) = 1;$

$f'(x) = 2xe^{x^2} \implies f'(0) = 0;$

$f''(x) = 2e^{x^2}(2x^2+1) \implies f''(0) = 2;$

Portanto,

$$p_2(x) = 1 + x^2.$$

(e) $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \implies f(0) = 1;$

$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \implies f'(0) = 0;$

$f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} \implies f''(0) = -2;$

Portanto,

$$p_2(x) = 1 - x^2.$$

Exercício 9 *Sabemos que* $(x, f(x))$ *é solução da equação* $x^2+\frac{y^2}{3}=1,\ \forall x\in \mathrm{Dom}(f)$*, então*

$$x^2+\frac{f(x)^2}{3}=1 \implies f(x)^2=3(1-x^2) \implies f(x)=\pm\sqrt{3(1-x^2)},$$

como $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$*, portanto*

$$f(x)=-\sqrt{3(1-x^2)}.$$

$f'(x)=\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{1-x^2}} \implies f'(-\frac{1}{2})=-1;$

$f''(x)=\frac{\sqrt{3}}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \implies f''(-\frac{1}{2})=\frac{8}{3};$

Portanto,

$$p_2(x)=-\frac{3}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Exercício 10 *Como queremos* $x\in[-\frac{\pi}{32},\frac{\pi}{32}]$*, vamos fazer o polinômio de Taylor em torno do ponto* $x_0=0$*. Dessa forma,*

$$p_5(x)=\mathrm{sen}(0)+\cos(0)(x-0)-\frac{\mathrm{sen}(0)(x-0)^2}{2!}-\frac{\cos(0)(x-0)^3}{3!}+\frac{\mathrm{sen}(0)(x-0)^4}{4!}+\frac{\cos(0)(x-0)^5}{5!} \Rightarrow$$

$$p_5(x)=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5.$$

Então, pelo Teorema da Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange, o resto é

$$\left|\mathrm{sen}(x)-\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)\right|=\frac{|\,\mathrm{sen}^{(6)}(c)|}{6!}|x|^6,\ c\in\left(-\frac{\pi}{32},\frac{\pi}{32}\right).$$

Pela dica do enunciado, sabemos que $|\mathrm{sen}(c)|\le c$*, logo* $|\mathrm{sen}^{(6)}(c)|=|-\mathrm{sen}(c)|=|\mathrm{sen}(c)|\le c$*, então, do termo de cima, temos:*

$$\frac{|\,\mathrm{sen}^{(6)}(c)|}{6!}|x|^6\le\frac{1}{6!}|c||x|^6$$

e como temos que $|c|<\frac{\pi}{32}$*, pelo Teorema da Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange usado acima, e* $x\le\frac{\pi}{32}$*, pelo intervalo de* x*, podemos seguir majorando esse termo por*

$$\frac{1}{6!}|c||x|^6<\frac{1}{720}\left(\frac{\pi}{32}\right)^7<\frac{1}{100}\left(\frac{\pi}{32}\right)^7<10^{-2}(10^{-1})^7=10^{-9},$$

portanto

$$|E(x)|=\left|\mathrm{sen}(x)-\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)\right|<10^{-9}.$$

Exercício 11 *Como queremos* $x\in[-\frac{\pi}{32},\frac{\pi}{32}]$*, vamos fazer o polinômio de Taylor em torno do ponto* $x_0=0$*. Dessa forma,*

$$p_5(x)=\cos(0)-\mathrm{sen}(0)(x-0)-\frac{\cos(0)(x-0)^2}{2!}+\frac{\mathrm{sen}(0)(x-0)^3}{3!}+\frac{\cos(0)(x-0)^4}{4!}-\frac{\mathrm{sen}(0)(x-0)^5}{5!} \Rightarrow$$

$$p_5(x)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4.$$

Assim como no Exercício 10, usando o Teorema da Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange e que $|\cos^{(6)}(c)|=|-\cos(c)|=|\cos(c)|\le 1$*, temos que o erro é*

$$\left|\cos(x)-\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4\right)\right|=\frac{|\cos^{(6)}(c)|}{6!}|x|^6\le\frac{1}{720}\left(\frac{\pi}{32}\right)^6<\frac{1}{720}(10^{-1})^6=\frac{1}{720}10^{-6}.$$

Exercício 12 *Uma maneira de estimar o valor de e é utilizando o polinômio de Taylor a partir da função* e^x*. Para se construir o polinômio de Taylor se utiliza a equação*

$$p(x) = e^{x_0} + (x - x_0) \cdot \frac{d}{dx}e^x(x_0) + \frac{(x-x_0)^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2}e^x(x_0)}{2!} +$$

$$+ \frac{(x-x_0)^3 \cdot \frac{d^3}{dx^3}e^x(x_0)}{3!} + ... + \frac{(x-x_0)^n \cdot \frac{d^n}{dx^n}e^x(x_0)}{n!}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$$

Por $\frac{d^n}{dx^n}e^x = e^x$*, temos que*

$$p(x) = e^{x_0} + (x - x_0)e^{x_0} + \frac{(x-x_0)^2 e^{x_0}}{2!} + \frac{(x-x_0)^3 e^{x_0}}{3!} + ... + \frac{(x-x_0)^n e^{x_0}}{n!}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R},$$

e escolhendo $x_0 = 0$*, temos por fim que*

$$p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$$

Por querermos a aproximação para $e = e^1$*, apenas temos que resolver*

$$p(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}, n \in \mathbb{N},$$

portanto a estimativa dada pela questão é verdadeira.

Agora para estimar o erro temos que voltar ao erro criado pela aproximação do polinômio de Taylor. Ele tem um erro que segue a relação

$$e^x = p(x) + E(x)$$

$$E(x) = \frac{(c - x_0)^{n+1}e^c}{(n+1)!}$$

assim,

$$|e^x - p(x)| = E(x) = \left|\frac{(c-x_0)^{n+1}e^c}{(n+1)!}\right| \leq \frac{(b-a)^{n+1} \cdot M}{(n+1)!}, \forall x \in (a,b), \forall n \in \mathbb{N},$$

onde $M > e^x$*. Por nossa aproximação apenas necessitar de* $x \in (0,1)$*, temos que o maior valor de* e^x *será* e*, ou seja, podemos escolher* $M = 3 > e$*, assim temos que*

$$E(x) \leq \frac{(1-0)^{n+1} \cdot 3}{(n+1)!} = \frac{3}{(n+1)!}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Isso nos diz que, conforme o valor de n *aumenta, o erro cometido na aproximação diminui.*

Exercício 13 (a) *Para estimar* $\ln(1.3)$ *temos que fazer o polinômio de Taylor de* $\ln(x)$ *com* $x = 1.3$*. Por conhecermos o valor de* $\ln(1) = 0$*, usaremos* $x_0 = 1$*. Assim, para ordem* $n = 3$*, temos* $p_3(x) = \ln(x_0) + (x - x_0) \cdot \frac{d}{dx}\ln(x)(x_0) + \frac{(x-x_0)^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2}\ln(x)(x_0)}{2!} + \frac{(x-x_0)^3 \cdot \frac{d^3}{dx^3}\ln(x)(x_0)}{3!} =$

$\ln(1) + (x-1)\cdot\frac{1}{1} - \frac{1}{1^2}\frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{1^3}\frac{1}{6}(x+1)^3 = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$. *Então* $\ln(1.3) \approx p_3(1.3) = 0.264$.

(b) *Para estimar* $\sqrt[3]{8.2}$ *temos que fazer o polinômio de Taylor de* $\sqrt[3]{x}$ *com* $x = 8.2$. *Por conhecermos o valor de* $\sqrt[3]{8} = 2$, *usaremos* $x_0 = 8$. *Assim, para ordem* $n = 3$, *temos* $p_3(x) = \sqrt[3]{x_0} + (x - x_0)\cdot\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x}(x_0) + \frac{(x-x_0)^2\cdot\frac{d^2}{dx^2}\sqrt[3]{x}(x_0)}{2!} + \frac{(x-x_0)^3\cdot\frac{d^3}{dx^3}\sqrt[3]{x}(x_0)}{3!} = \sqrt[3]{8} + 1/3\cdot(x-8)\cdot(8)^{-2/3} - 2/9\frac{1}{2}(x+1)^2\cdot(8)^{-5/3} + 10/27\frac{1}{6}(x+1)^3\cdot(8)^{-8/3} = 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2 + \frac{5}{20736}(x-8)^3$. *Então* $\sqrt[3]{8.2} \approx p_3(8.2) = 2,0165297\overline{0679012345}$.

(c)*Para estimar* $\operatorname{sen}(0.1)$ *temos que fazer o polinômio de Taylor de* $\operatorname{sen}(x)$ *com* $x = 0.1$. *Por conhecermos o valor de* $\operatorname{sen}(0) = 0$, *usaremos* $x_0 = 0$. *Assim, para ordem* $n = 3$, *temos* $p_3(x) = \operatorname{sen}(x_0) + (x - x_0)\cdot\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x)(x_0) + \frac{(x-x_0)^2\cdot\frac{d^2}{dx^2}\operatorname{sen}(x)(x_0)}{2!} + \frac{(x-x_0)^3\cdot\frac{d^3}{dx^3}\operatorname{sen}(x)(x_0)}{3!} = \operatorname{sen}(0) + (x)\cdot\cos(0) - \operatorname{sen}(0)\frac{1}{2}(x)^2 - \cos(0)\frac{1}{6}(x)^3 = x - \frac{1}{6}x^3$. *Então* $\operatorname{sen}(0.1) \approx p_3(0.1) = 0.099833\overline{3}$.

(d) *Para estimar* $\cos(0.1)$ *temos que fazer o polinômio de Taylor de* $\cos(x)$ *com* $x = 0.1$. *Por conhecermos o valor de* $\cos(0) = 1$, *usaremos* $x_0 = 0$. *Assim, para ordem* $n = 3$, *temos* $p_3(x) = \cos(x_0) + (x - x_0)\cdot\frac{d}{dx}\cos(x)(x_0) + \frac{(x-x_0)^2\cdot\frac{d^2}{dx^2}\cos(x)(x_0)}{2!} + \frac{(x-x_0)^3\cdot\frac{d^3}{dx^3}\cos(x)(x_0)}{3!} = \cos(0) - (x)\cdot\operatorname{sen}(0) - \cos(0)\frac{1}{2}(x)^2 + \operatorname{sen}(0)\frac{1}{6}(x)^3 = 1 - \frac{1}{2}x^2$. *Então* $\cos(0.1) \approx p_3(0.1) = 0.995$.