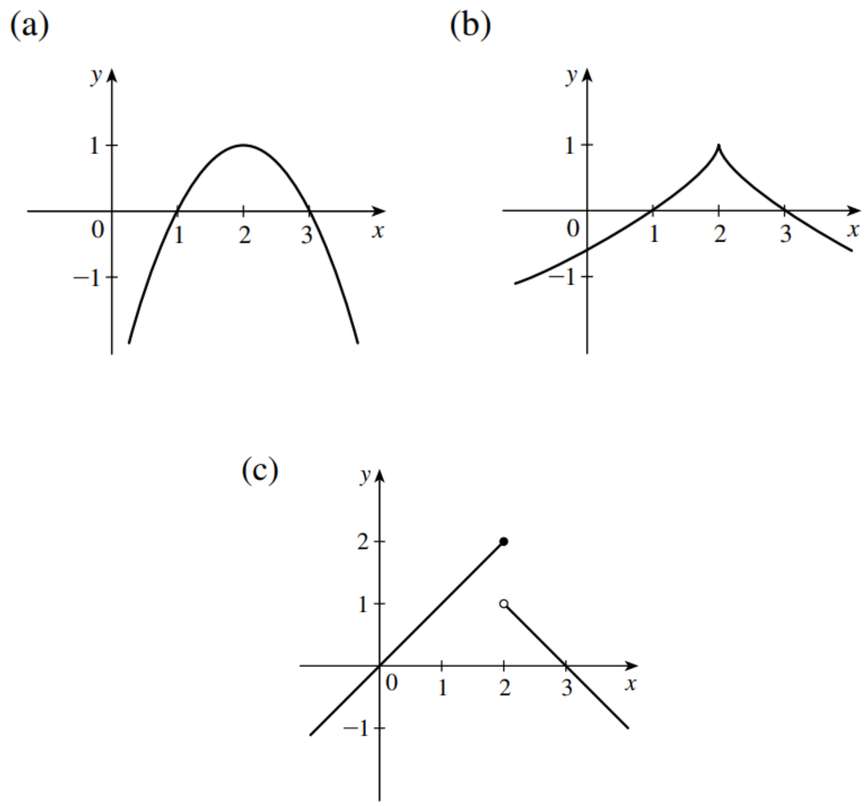
$\boxed{\text{Gabarito da Lista de Exercícios de SMA0301-Cálculo I - Módulo 4}}$

Última atualização em 25/04/2023

Exercício 1 .



Exercício 2 *(i) Para encontrar os valores máximos e mínimos globais de uma função contínua* f *num intervalo fechado* $[a, b]$*:*

1. *Encontre os valores de* f *nos pontos críticos de* f *em* (a, b)*;*
2. *Encontre os valores de* f *nos extremos do intervalo;*
3. *O maior valor das etapas 1 e 2 é o valor máximo global e o menor desses valores é o mínimo global.*

(ii) *(a)* $f'(x) = \frac{-4x^2+8x+8}{(2+x^2)^2}$, *os pontos críticos de* f *são* $\{1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\}$. *Além disso,* $f(-1) = -\frac{2}{3}$ *e* $f(5) = \frac{70}{27}$. *Portanto, o minímo global de* f *no intervalo* $[-1, 5]$ *é* $x = 1-\sqrt{3}$ *e máximo global é* $x = 1+\sqrt{3}$.

(b) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2$, *os pontos críticos de* f *são* $\{1, -\frac{1}{2}\}$. *Além disso,* $f(-1) = 1$ *e* $f(1) = 1$. *Portanto, o minímo global de* f *no intervalo* $[-1, 1]$ *é* $x = -\frac{1}{2}$ *e máximo global é* $x = \{-1, 1\}$.

(c) $f'(x) = \frac{2x-3x^2}{3\sqrt[3]{(x^2-x^3)^2}}$, *o ponto crítico de* f *é* $\{\frac{2}{3}\}$. *Além disso,* $f(0) = 0$ *e* $f(1) = 0$. *Portanto, o minímo global de* f *no intervalo* $[0, 1]$ *é* $x = \{0, 1\}$ *e máximo global é* $x = \frac{2}{3}$.

(d) $f'(x) = 1+\ln x$, *o ponto crítico de* f *é* $\{\frac{1}{e}\}$. *Além disso,* $f(\frac{1}{3}) = -\frac{\ln 3}{3}$ *e* $f(2) = 2\ln 2$. *Portanto, o minímo global de* f *no intervalo* $[\frac{1}{3}, 2]$ *é* $x = \frac{1}{e}$ *e máximo global é* $x = 2$.

(iii) (b1) *Nem sempre é verdade. Pois como vimos no método descrito no item (i), para encontrar os valores máximos e mínimos globais de uma função contínua num intervalo fechado, os pontos de máximo e mínimos são tomados entre os pontos críticos (os quais a derivada se anula) e os pontos da extremidade do intervalo (os quais não necessariamente a derivada se anula). No caso do item (b), o ponto* $x = -1$ *é ponto de máximo global, entretando a derivada não se anula neste ponto.*

(b2) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2$, *os pontos críticos de* f *são* $\{1, -\frac{1}{2}\}$. *Além disso,* $f(-1) = 1$ *e* $f(2) = 4$. *Portanto, o minímo global de* f *no intervalo* $[-1, 2]$ *é* $x = -\frac{1}{2}$ *e máximo global é* $x = 2$.

(b3) *Considere o intervalo* $[0, 2]$. $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2$, *os pontos críticos de* f *são* $\{1, -\frac{1}{2}\}$. *Além disso,* $f(0) = 0$ *e* $f(2) = 4$. *Portanto, o minímo global de* f *no intervalo* $[0, 2]$ *é* $x = 0$ *e máximo global é* $x = 2$. *Note que* $f'(0) \neq 0$ *e* $f'(2) \neq 0$.

Exercício 3 *(i)* *Um ponto* $p \in \mathrm{Dom}(f)$ *é um ponto crítico de* f *se* $f'(p) = 0$.

(ii) *Considere* $f(x) = x^3$, $p = 0$ *é um ponto crítico de* f, *porém não é ponto de máximo nem de mínimo.*

(iii) *Seja* f *uma função contínua em* (a, b) *e* $p \in (a, b)$ *um ponto crítico de* f. *Suponha que* f' *exista em todos os pontos do intervalo* (a, b) *exceto possivelmente em* p.
- *Se* $f'(x) > 0$, *para* $x \in (p - \delta, p)$ *e* $f'(x) < 0$, *para* $x \in (p + \delta, p)$, *para algum* $\delta > 0$, *então* f *tem um máximo local em* p.
- *Se* $f'(x) < 0$, *para* $x \in (p - \delta, p)$ *e* $f'(x) > 0$, *para* $x \in (p + \delta, p)$, *para algum* $\delta > 0$, *então* f *tem um mínimo local em* p.

(iv) *Sejam* f *uma função e* $p \in \mathrm{Dom}(f)$. *Dizemos que* p *é um ponto de máximo global de* f *se para todo* $x \in \mathrm{Dom}(f)$, $f(x) \leq f(p)$. *Por outro lado, dizemos que* p *é um ponto de mínimo global de* f *se para todo* $x \in \mathrm{Dom}(f)$, $f(x) \geq f(p)$.

Dizemos que p *é um ponto de máximo local de* f *se existir* $r > 0$ *tal que para todo* $x \in (p - r, p + r) \cap \mathrm{Dom}(f)$, $f(x) \leq f(p)$. *Por outro lado, dizemos que* p *é um ponto de mínimo local de* f *se existir* $r > 0$ *tal que para todo* $x \in (p - r, p + r) \cap \mathrm{Dom}(f)$, $f(x) \geq f(p)$.

(v) (a) *Temos que* $f'(x) = 2(x - \frac{1}{x^2})$, *assim* $f'(0) = 0$ *se, e somente se,* $x = 1$.

Note ainda que, existe $f'(x)$, *para todo* $x \in \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, *logo o único ponto crítico de* f *é* $x = 1$.

Considerando os intervalos $A = (-\infty, 0), B = (0, 1)$ *e* $C = (1, \infty)$, *e em seguida escolhendo, por exemplo,* $a = -1 \in A$, $b = \frac{1}{2} \in B$ *e* $c = 2 \in C$, *obtemos que* $f'(-1) = -4 < 0$, $f'(\frac{1}{2}) = -7 < 0$ *e* $f'(2) = \frac{7}{2} > 0$.

Concluímos assim que f *é decrescente nos intervalos* A *e* B*, e crescente em* C*. Consequentemente,* $x = 1$ *é um ponto de mínimo e* f *não possui ponto de máximo.*

(b) Temos que $f'(x) = \text{sen}(x)(2\cos(x) - 1)$*, assim* $f'(x) = 0$ *se, e somente se,* $\sin(x) = 0$ *ou* $\cos(x) = \frac{1}{2}$*.*

Logo, x *é um ponto crítico de* f *se, e somente se,*

$$x \in \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Como f *tem período* 2π*, vamos analisar a função apenas no intervalo* $[0, 2\pi)$*, pois* f *tem o mesmo comportamento em qualquer intervalo da forma* $[2k\pi, 2(k+1)\pi)$*, com* $k \in \mathbb{Z}$*.*

Considere os subintervalos $A = (0, \frac{\pi}{3}), B = (\frac{\pi}{3}, \pi), C = (\pi, \frac{5\pi}{3})$ *e* $D = (\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$*. Escolhendo, por exemplo,* $a = \frac{\pi}{4} \in A, b = \frac{\pi}{2} \in B, C = \frac{3\pi}{2}$ *e* $d = \frac{11\pi}{6} \in D$*, temos que* $f'(a) = -\frac{2-\sqrt{2}}{2} > 0$*,* $f'(b) = -1 < 0$*,* $f'(c) = 1 > 0$ *e* $f'(d) = \frac{1-\sqrt{3}}{2} < 0$*.*

Portanto, f *é crescente nos intervalos* A *e* C*, e decrescente em* B *e* D*. Logo, os pontos* $\frac{\pi}{3}$ *e* $\frac{5\pi}{3}$ *são máximos locais, enquanto que* 0 *e* π *são mínimos locais.*

Generalizando, os pontos da forma $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ *e* $\frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ *são máximos locais, enquanto que* $0 + 2k\pi$ *e* $\pi + 2k\pi$ *são mínimos locais, para todo* $k \in \mathbb{Z}$*.*

(c) Temos que $f'(x) = \frac{x^2-12}{3(x^2-4)^{\frac{4}{3}}}$*. Assim,* $f'(x) = 0$ *se, e somente se,* $x = \sqrt{12}$ *ou* $x = -\sqrt{12}$*.*

Note que esses são os únicos pontos críticos, pois $f'(x)$ *existe para todo* $x \in \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$*.*

Testando o sinal de $f'(x)$ *(escolha um* x *em cada intervalo e calcule), obtemos que* $f'(x) > 0$*, para todo* $x \in (-\infty, -\sqrt{12}) \cup (\sqrt{12}, \infty)$ *e* $f'(x) < 0$*, para* $x \in (-\sqrt{12}, \sqrt{12}) - \{-2, 2\}$*.*

Portanto, f *é crescente em* $(-\infty, -\sqrt{12}) \cup (\sqrt{12}, \infty)$*, e decrescente em* $(-\sqrt{12}, \sqrt{12}) - \{-2, 2\}$*, consequentemente,* $-\sqrt{12}$ *é máximo, enquanto que* $\sqrt{12}$ *é mínimo.*

(d) Temos que $f'(x) = \frac{x+1}{2\sqrt{x^3}}$*. Note que* $\text{Dom}(f) = (0, \infty)$*, logo* $f'(x)$ *existe e é diferente de zero, para todo* $x \in \text{Dom}(f)$*. Assim,* f *não possui pontos críticos.*

Além disso, $f'(x) > 0$ *e portanto* f *é crescente em todo o seu domínio.*

(e) Temos que $f'(x) = \frac{2x}{x^2+2}$*. O único ponto crítico é* $x = 0$*. Note que,* $f'(-1) < 0$ *e* $f'(1) > 0$*, assim,* f *é decrescente em* $(-\infty, 0)$ *e crescente em* $(0, \infty)$*. Portanto,* 0 *é ponto mínimo.*

Exercício 4 *(i) Seja* f *contínua em* $p \in \text{Dom}(f)$*. Dizemos que* p *é ponto de inflexão de* f *se existem* $a, b \in \mathbb{R}$ *tais que* $p \in (a, b)$ *e* p *muda a concavidade da função, ou seja,* $f|_{(a,p)}$ *tem concavidade para cima e* $f|_{(p,b)}$ *tem concavidade para baixo ou* $f|_{(a,p)}$ *tem concavidade para baixo e* $f|_{(p,b)}$ *tem concavidade para cima.*

Seja f uma função derivável até segunda ordem em (a,b). Então,
- *Se $f''(x) > 0$, para todo $x \in (a,b)$, então f tem concavidade para cima (côncava) em (a,b);*
- *Se $f''(x) < 0$, para todo $x \in (a,b)$, então f tem concavidade para baixo (convexa) em (a,b).*

(ii) *(a)* *Ponto de inflexão em $x = -\sqrt[3]{2}$.*
Concavidade para cima em $(-\infty, -\sqrt[3]{2})$.
Concavidade para baixo em $(-\sqrt[3]{2}, 0)$.

(b) *Pontos de inflexão em $x = \arccos(\frac{1+\sqrt{33}}{8}) + 2\pi n, x = -\arccos(\frac{1+\sqrt{33}}{8}) + 2\pi n, x = \arccos(\frac{1-\sqrt{33}}{8}) + 2\pi n, x = -\arccos(\frac{1-\sqrt{33}}{8}) + 2\pi n$ com $n \in \mathbb{Z}$.*
Concavidade para cima em $(-\arccos(\frac{1+\sqrt{33}}{8})+2\pi n, \arccos(\frac{1+\sqrt{33}}{8})+2\pi n)$ e $(\arccos(\frac{1-\sqrt{33}}{8})+2\pi n, -\arccos(\frac{1-\sqrt{33}}{8}) + 2\pi n)$, com $n \in \mathbb{Z}$.
Concavidade para baixo em $(\arccos(\frac{1+\sqrt{33}}{8})+2\pi n, \arccos(\frac{1-\sqrt{33}}{8})+2\pi n)$ e $(-\arccos(\frac{1-\sqrt{33}}{8})+2\pi n, -\arccos(\frac{1+\sqrt{33}}{8}) + 2\pi n)$, com $n \in \mathbb{Z}$.

(c) *Pontos de inflexão em $x = \{-6, 0, 6\}$.*
Concavidade para cima em $(-\infty, -6)$, $(-2, 0)$ e $(2, 6)$.
Concavidade para baixo em $(-6, -2)$, $(0, 2)$ e $(6, +\infty)$.

(d) *Não possui pontos de inflexão.*

(e) *Pontos de inflexão em $x = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.*
Concavidade para cima em $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
Concavidade para baixo em $(-\infty, -\sqrt{2})$ e$(\sqrt{2}, +\infty)$.

Exercício 5 *(a)* *Lembremos que o domínio da função $\ln(x)$ é o intervalo $(0, +\infty)$. Fixe $b > 0$ e considere $x > 0$. Defina $f(x) := \ln(xb)$ e $g(x) = \ln(x) + \ln(b)$. Derivando cada uma destas funções obtemos*

$$f'(x) = \frac{1}{bx}b = \frac{1}{x} \text{ e } g'(x) = \frac{1}{x},$$

portanto $(f - g)'(x) = 0$, logo

$$(f - g)(x) = \ln(xb) - \ln(x) + \ln(b) = c,$$

em todo o intervalo $(0, +\infty)$, para algum $c \in \mathbb{R}$. Como vale para todo $x \in (0, +\infty)$, tome $x = 1$ e temos

$$\ln(b) - \ln(1) + \ln(b) = c \Rightarrow \ln(b) - \ln(b) = c \Rightarrow 0 = c,$$

assim $\ln(xb) - \ln(x) + \ln(b) = 0$, ou seja, $\ln(xb) = \ln(x) + \ln(b)$ para todo $x \in (0, +\infty)$. Portanto,

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

(b) *É importante que o domínio de* f *seja um intervalo para que* f *seja constante nessas condições. No exemplo* $f(x) = \frac{x}{|x|}$ *temos* $f'(x) = 0$ *em todo ponto do domínio. A função* f *não é constante e, como podemos observar, o domínio de f não é um intervalo.*

(c) *Seja* $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, *e note que* $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. *Assim,* f' *não tem raiz real se, e somente se,* $\Delta = 4a^2 - 12b < 0$, *então* f' *não tem raiz real se, e somente se,* $a^2 < 3b$. *Logo, para* $a^2 < 3b$ *a função* f *não tem máximo ou mínimo.*

Agora, $f''(x) = 6x+2a$. *Assim,* $f''(x) = 0$ *se, e somente se,* $x = -a/3$. *Caso* $a^2 = 3b$ *segue que* $\Delta = 0$ *e com isso* $x = -a/3$ *é raiz de* f'. *Mas na verdade* $x = -a/3$ *é um ponto de inflexão, e portanto também nesse ponto a função* f *não tem máximo ou mínimo. Logo,* f *não tem máximo ou mínimo se, e somente se,* $a^2 \leq 3b$.

(d) $a = -3/2$ *e* $b = -18$. *O máximo é em* $x = -2$.

Exercício 6 (a) *Temos que* $f'(x) = \cos(x)$ *e* $f''(x) = -\mathrm{sen}(x)$. *Assim,* $f''(x) = 0$ *se, e somente se,* $x \in \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Tomando $a = k\pi - \frac{\pi}{2}$ *e* $b = k\pi + \frac{\pi}{2}$, *temos que* $f''(a) = (-1)^k$, *enquanto que* $f''(b) = (-1)^{k+1}$. *Assim,* $f''(a) = -f''(b)$, *para qualquer* $k \in \mathbb{Z}$. *Portanto, há uma mudança de concavidade na* f, *ou seja,* $x = k\pi$ *é ponto de inflexão.*

Além disso, os zeros da função $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ *são os únicos pontos de inflexão.*

(b) *Obtemos que* $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$ *e* $f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b$. *As raízes de* $f''(x)$ *dependem do valor de* $\Delta = 36a^2 - 96b$.

- *Se* $\Delta < 0$, *não existem raízes reais e consequentemente não existem pontos de inflexão.*

- *Se* $\Delta = 0$, *existe uma única raiz real e consequentemente existe um único ponto de inflexão.*

- *Se* $\Delta > 0$, *então* f'' *possui duas raízes reais (distintas), neste caso,* f'' *possui dois pontos de inflexão.*

Portanto,
(i) *Se* $36a^2 - 96b < 0 \Rightarrow 36a^2 < 96b \Rightarrow \frac{6}{16}a^2 < b,$*então* f *não tem ponto de inflexão.*

(ii) *Se* $36a^2 - 96b = 0 \Rightarrow 36a^2 = 96b \Rightarrow \frac{6}{16}a^2 = b,$*então* f *tem um único ponto de inflexão.*

(iii) *Se* $36a^2 - 96b > 0 \Rightarrow 36a^2 > 96b \Rightarrow \frac{6}{16}a^2 > b,$*então* f *tem, exatamente, dois pontos de inflexão.*

Exercício 7 (a)
- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$;
- $f(x) = 0 \implies x = 1$;
- $f'(x) = \frac{1}{5x^{\frac{4}{5}}} > 0$, $\forall x \in \mathrm{Dom}(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Portanto,* f *é crescente em todo seu domínio e não possui pontos críticos;*

- $f''(x) = -\frac{4}{25x^{\frac{9}{5}}}$. *Temos que* $f''(x) > 0$ *para* $x < 0$ *e* $f''(x) < 0$ *para* $x > 0$. *Portanto,* f *tem concavidade para baixo em* $(0, \infty)$ *e concavidade para cima em* $(-\infty, 0)$.
- *Calculando os limites relevantes, teremos*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (x^{\frac{1}{5}} - 1) = \infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^{\frac{1}{5}} - 1) = -\infty$$

portanto, f *não possui assintotas.*

- *Teremos o seguinte esboço para o gráfico*

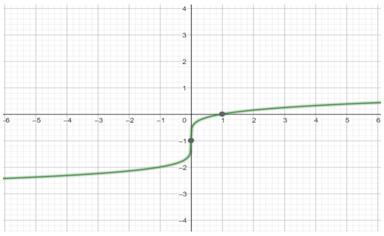


Figura 1: $f(x) = x^{1/5} - 1$

(b)

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$;
- $f(x) = 0 \implies x = \{-8, 0\}$;
- $f'(x) = \frac{8+4x}{3x^{\frac{2}{3}}} = 0 \implies x = -2$. *Portanto,* f *é crescente em* $x > -2$ *e decrescente em* $x < -2$;
- $f''(x) = \frac{4x-16}{9x^{\frac{5}{3}}} = 0 \implies x = 4$. *Temos que* $f'' < 0$ *em* $0 < x < 4$ *e* $f'' > 0$ *em* $x < 0$ *e* $x > 4$. *Portanto,* f *tem concavidade para baixo em* $(0, 4)$ *e concavidade para cima em* $(-\infty, 0)$ *e* $(4, \infty)$. *Alem disso,* $x = 4$ *é um ponto de inflexão da curva.*
- *Teremos os seguintes sinais para* f' *e* f'':

f'		f''		
$x < -2$	$x > -2$	$x < 0$	$0 < x < 4$	$x > 4$
-	+	+	-	+

Analisando os sinais, temos que o ponto $x = -2$ *é um ponto de mínimo da função.*

- *Calculando os limites relevantes, teremos*

$$\lim_{x \to -\infty} 8x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{4}{3}} = -\infty$$
$$\lim_{x \to \infty} 8x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{4}{3}} = \infty$$

portanto, f *não possui assintotas.*

- *Teremos o seguinte esboço para o gráfico*

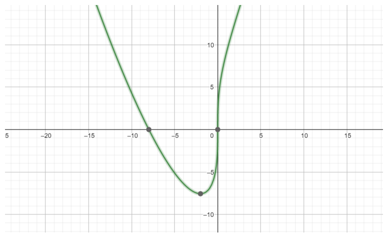


Figura 2: $f(x) = 8x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{4}{3}}$

(c)
- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$*;*
- $f(x) = 0 \implies x = \frac{1}{4}(4\pi n - \pi),\ n \in \mathbb{Z}$*;*
- $f'(x) = \cos(x) - \mathrm{sen}(x) = 0 \implies x = \frac{1}{4}(4\pi n + \pi),\ n \in \mathbb{Z}$. *Portando,* $x = \frac{1}{4}(4\pi n + \pi),\ n \in \mathbb{Z}$*, são pontos críticos de* f.
- $f''(x) = -\mathrm{sen}(x) - \cos(x) = 0 \implies x = \frac{1}{4}(4\pi n - \pi),\ n \in \mathbb{Z}$. *Portanto,* $x = \frac{1}{4}(4\pi n - \pi),\ n \in \mathbb{Z}$*, são pontos de inflexão de* f.
- *Como* f *é periódica, vamos analisar os sinais para* f' *e* f'' *num período:*

f'		
$-\frac{3\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4} < x < \frac{9\pi}{4}$
+	-	+

f''		
$-\frac{5\pi}{4} < x < -\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$
+	-	+

- *Teremos o seguinte esboço para o gráfico*

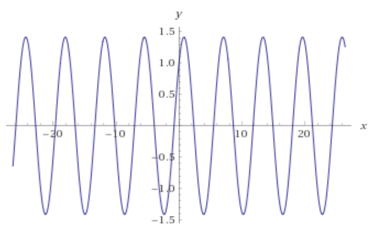


Figura 3: $f(x) = \mathrm{sen}(x) + \cos(x)$

(d)
- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^*$*;*
- $f(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^*$*;*
- $f'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$. *Note que* $f' < 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^*$. *Portanto,* f *decrescente em todo seu domínio;*

- $f''(x) = \frac{2e^{\frac{1}{x}}}{x^3} + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4} = 0 \implies x = -\frac{1}{2}$. *Temos que* $f'' > 0$ *em* $(0, \infty)$ *e* $(-\frac{1}{2}, 0)$, *e* $f'' < 0$ *em* $(-\infty, -\frac{1}{2})$. *Portanto,* f *tem concavidade para cima em* $(0, \infty)$ *e* $(-\frac{1}{2}, 0)$, *e concavidade para baixo em* $(-\infty, -\frac{1}{2})$. *Alem disso,* $x = -\frac{1}{2}$ *é um ponto de inflexão da curva.*

- *Teremos os seguintes sinais para* f'':

$x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 0$	$x > 0$
-	+	+

- *Calculando os limites relevantes, teremos*

$$\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$
$$\lim_{x \to \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$
$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$
$$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$$

portanto, f *possui assintota vertical em* $x = 0$ *e assíntota horizontal em* $y = 1$.

- *Teremos o seguinte esboço para o gráfico*

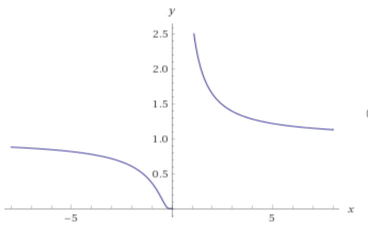


Figura 4: $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

(e)
- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$;

- $f(x) = 0 \implies x = 0$;

- $f'(x) = \frac{-4x^2-36}{(x^2-9)^2}$. *Note que* $f' < 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$. *Portanto,* f *decrescente em todo seu domínio;*

- $f''(x) = \frac{8x(x^2+27)}{(x^2-9)^3} = 0 \implies x = 0$. *Temos que* $f'' > 0$ *em* $(3, \infty)$ *e* $(-3, 0)$, *e* $f'' < 0$ *em* $(-\infty, -3)$ *e* $(0, 3)$. *Portanto,* f *tem concavidade para cima em* $(3, \infty)$ *e* $(-3, 0)$, *e concavidade para baixo em* $(-\infty, -3)$ *e* $(0, 3)$. *Alem disso,* $x = 0$ *é um ponto de inflexão da curva.*

- *Teremos os seguintes sinais para* f'':

$x < -3$	$-3 < x < 0$	$0 < x < 3$	$x > 3$
-	+	-	+

- *Calculando os limites relevantes, teremos*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{x^2-9} = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x}{x^2-9} = 0$$
$$\lim_{x\to-3^-} \frac{4x}{x^2-9} = -\infty$$
$$\lim_{x\to-3^+} \frac{4x}{x^2-9} = \infty$$
$$\lim_{x\to3^-} \frac{4x}{x^2-9} = -\infty$$
$$\lim_{x\to3^+} \frac{4x}{x^2-9} = \infty$$

portanto, f *possui assintota horizontal* $y = 0$ *e assintotas verticais em* $x = 3$ *e* $x = -3$.

- *Teremos o seguinte esboço para o gráfico*

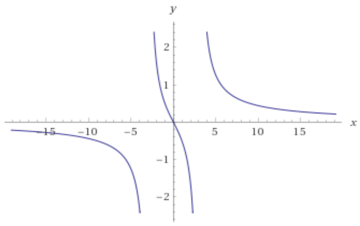


Figura 5: $f(x) = \frac{4x}{x^2-9}$

(f)
- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$;
- $f(x) = 0 \implies x = \{-2, 1\}$;
- $f'(x) = \frac{2x^2-2x+3}{(2x-1)^2}$. *Note que* $f' > 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$. *Portanto,* f *crescente em todo seu domínio;*
- $f''(x) = -\frac{10}{(2x-1)^3} \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$. *Temos que* $f'' > 0$ *em* $(-\infty, \frac{1}{2})$ *e* $f'' < 0$ *em* $(\frac{1}{2}, \infty)$. *Portanto,* f *tem concavidade para cima em* $(-\infty, \frac{1}{2})$ *e concavidade para baixo em* $(\frac{1}{2}, \infty)$.
- *Teremos os seguintes sinais para* f''*:*

$x < \frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$
$+$	-

- *Calculando os limites relevantes, teremos*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-2}{2x-1}=-\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-2}{2x-1}=\infty$$
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{x^2+x-2}{2x-1}=+\infty$$
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{x^2+x-2}{2x-1}=-\infty$$

portanto, f *possui assintota vertical em* $x=\frac{1}{2}$*.*

- *Teremos o seguinte esboço para o gráfico*

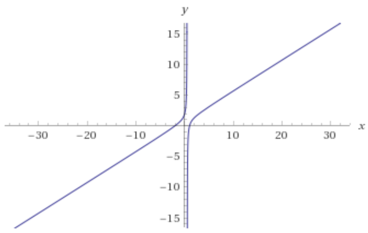


Figura 6: $f(x)=\frac{x^2+x-2}{2x-1}$

Exercício 8 *(a)*

$$\lim_{x\to-\frac{5}{2}^+}\frac{8}{(2x+5)^5}=\infty,\quad \lim_{x\to-\frac{5}{2}^-}\frac{8}{(2x+5)^5}=-\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{8}{(2x+5)^5}=0,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{8}{(2x+5)^5}=0$$

Assíntota vertical: reta $x=-5/2$*.*

Assíntota horizontal: reta $y=0$*.*

(b)

$$\lim_{x\to\frac{9}{2}^+}\frac{3x^2}{(2x-9)^2}=\infty,\quad \lim_{x\to\frac{9}{2}^-}\frac{3x^2}{(2x-9)^2}=\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{(2x-9)^2}=\frac{3}{4},\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{(2x-9)^2}=\frac{3}{4}$$

Assíntota vertical: reta $x=9/2$*.*

Assíntota horizontal: reta $y=3/4$*.*

c)

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{2x^2}{x^2-x-2}=-\infty,\quad \lim_{x\to-1^-}\frac{2x^2}{x^2-x-2}=\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{2x^2}{x^2-x-2} = \infty, \quad \lim_{x\to 2^-} \frac{2x^2}{x^2-x-2} = -\infty$$

.

$$\lim_{x\to \infty} \frac{2x^2}{x^2-x-2} = 2, \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2}{x^2-x-2} = 2$$

Assíntota vertical: retas $x = -1$ *e* $x = 2$.

Assíntota horizontal: reta $y = 2$.

Exercício 9 *(a)* f *contínua,* $f(0) = 4$*,* $f(2) = 2$*,* $f(5) = 6$*;*

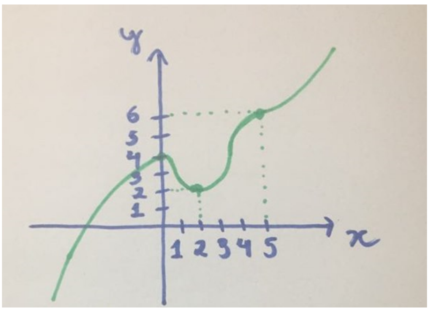
$f'(0) = f'(2) = 0$*, ou seja,* 0 *e* 2 *são pontos críticos;*

$f'(x) > 0$ *se* $|x-1| > 1$*, ou seja,* f *crescente;*

$f'(x) < 0$ *se* $|x-1| < 1$*, ou seja,* f *decrescente;*

$f''(x) < 0$ *se* $x < 1$ *ou se* $|x-4| < 1$*, ou seja,*f *tem concavidade para baixo;*

$f''(x) > 0$ *se* $x > 5$ *ou se* $|x-2| < 1$*, ou seja,* f *tem concavidade para cima.*



(b) f *contínua,* $f(0) = 2$*,* $f(2) = 1$*,* $f(4) = f(10) = 0$*,* $f(6) = -4$*;*

$f'(2) = f'(6) = 0$*, ou seja,* 2 *e* 6 *são pontos críticos;*

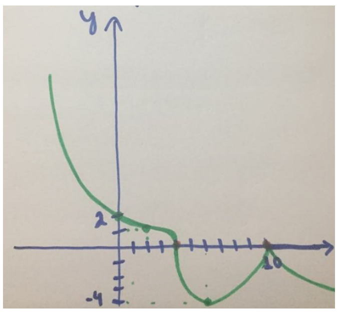
$f'(x) < 0$ *em* $(-\infty, 4), (4, 6)$ *e* $(10, \infty)$*, ou seja,* f *decrescente;*

$f'(x) > 0$ *em* $(6, 10)$*, ou seja,* f *crescente;*

não existem $f'(4)$ *e* $f'(10)$*, ou seja, retas tangentes não definidas em* 4 *e* 10*;*

$f''(x) > 0$ *em* $(-\infty, 2), (4, 10)$ *e* $(10, \infty)$*, ou seja,* f *tem concavidade para cima;*

$f''(x) < 0$ *em* $(2, 4)$*, ou seja,* f *tem concavidade para baixo.*



(c) $f(2) = 4$;

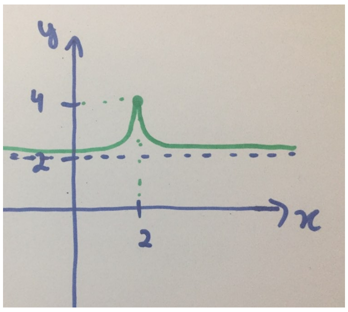
$f'(x) > 0$ *se* $x < 2$, *ou seja,* f *crescente;*

$f'(x) < 0$ *se* $x > 2$, *ou seja,* f *decrescente;*

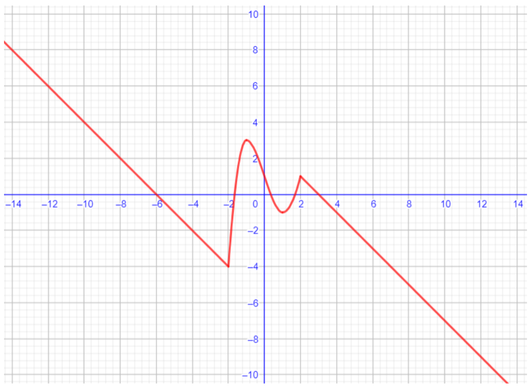
$f''(x) > 0$ *se* $x \neq 2$, *ou seja,* f *tem concavidade para cima;*

$\lim_{x \to 2} |f'(x)| = +\infty$, *ou seja,* $x = 2$ *é uma assíntota vertical;*

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$, *ou seja, y=2 é uma assíntota horizontal.*



(d) $f(x) = \begin{cases} -x - 6, x < -2 \\ -7x^2 - 14x - 4, -2 < x < -1 \\ x^3 - 3x + 1, -1 \leq x \leq 1 \\ 2x^2 - 4x + 1, 1 < x < 2 \\ -x + 3, x > 2. \end{cases}$



Exercício 10 (a) $f(x) = x + \frac{2}{x^2}$, *logo* $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^3}$. *Assim,* $f'(x) < 0$ *em* $(-\infty, 0)$ *e* $(2^{\frac{2}{3}}, \infty)$ *e* $f'(x) > 0$ *em* $(0, 2^{\frac{2}{3}})$. *Além disso,* $f'(x) \neq 0$, $\forall x$. *Portanto,* f *é crescente em* $(0, 2^{\frac{2}{3}})$, *decrescente em* $(-\infty, 0)$ *e* $(2^{\frac{2}{3}}, \infty)$, *além disso* f *não possui ponto crítico.*

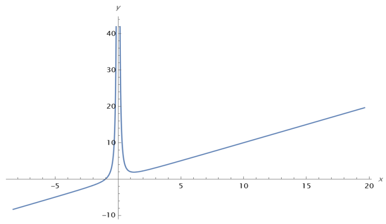


Figura 7: $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$

(b) $f(x) = \frac{2x^2+4x}{2+x^2}$, *logo* $f'(x) = \frac{-4x^2+8x+8}{(2+x^2)^2}$. *Assim,* $f'(x) < 0$ *em* $(-\infty, 1-\sqrt{3})$ *e* $(1+\sqrt{3}, \infty)$ *e* $f'(x) > 0$ *em* $(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$. *Além disso,* $f'(x) = 0$ *se* $x = \{1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\}$. *Portanto,* f *é crescente em* $(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$, *decrescente em* $(-\infty, 1-\sqrt{3})$ *e* $(1+\sqrt{3}, \infty)$ *e* $x = \{1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\}$ *são pontos críticos.*

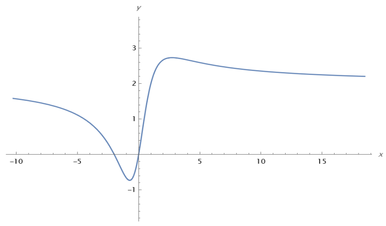


Figura 8: $\frac{2\left(x^2+2x\right)}{x^2+2}$

(c) $f(x) = x^x$, $x > 0$, *logo* $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$. *Assim,* $f'(x) < 0$ *em* $(0, \frac{1}{e})$ *e* $f'(x) > 0$ *em* $(\frac{1}{e}, \infty)$. *Além disso,* $f'(\frac{1}{e}) = 0$. *Portanto,* f *é crescente em* $(\frac{1}{e}, \infty)$, *decrescente em* $(0, \frac{1}{e})$ *e* $x = \frac{1}{e}$ *é ponto crítico.*

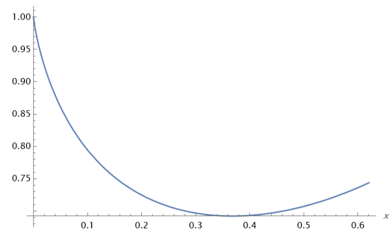


Figura 9: x^x

Exercício 11 *(a)* • $\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}\}$;

- $f(x) = 0 \implies x = 1$;
- $f'(x) = \ln(x) + 1 = 0 \implies x = \frac{1}{e}$. *Portanto,* f *é decrescente em* $(0, \frac{1}{e})$ *e crescente em* $(\frac{1}{e}, \infty)$;
- $f''(x) = \frac{1}{x}$, *portanto* $f'(x) > 0$ *para todo* $x \in \mathrm{Dom}(f)$, *portanto a função tem concavidade para cima em todo seu domínio, portanto a função não possui nenhum ponto de inflexão.*
- *Teremos os seguintes sinais para* f' *e* f'':

f'	
$0 < x < \frac{1}{e}$	$x > \frac{1}{e}$
-	+

f''
$x > 0$
+

Analisando os sinais, temos que o ponto $x = \frac{1}{e}$ *é um ponto de mínimo da função.*

- *Calculando os limites relevantes, teremos*

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(x) = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} x\ln(x) = \infty$$

portanto, $f(x)$ *não possui assintotas.*

- *Teremos o seguinte esboço para o gráfico*

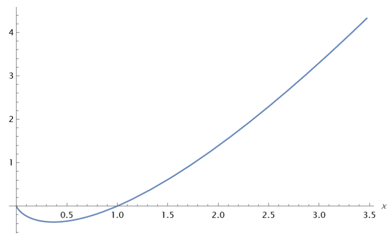


Figura 10: $f(x) = x\ln(x)$

(b)
- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$*;*
- $f(x) = 0 \implies x = 0$*;*
- $f'(x) = \frac{3x^2+x^4}{(1+x^2)^2} = 0 \implies x = 0$*. Portanto,* f *é crescente em* $x \in R$*;*
- $f''(x) = -\frac{6x+4x^3-2x^5}{(1+x^2)^4} = 0 \implies x = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$*. Temos que* $f'' < 0$ *em* $(-\sqrt{3}, 0)$ *e* $(\sqrt{3}, \infty)$ *e* $f'' > 0$ *em* $(-\infty, -\sqrt{3})$ *e* $(0, \sqrt{3})$*. Portanto,* f *tem concavidade para baixo em* $(-\sqrt{3}, 0)$ *e* $(\sqrt{3}, \infty)$*, e concavidade para cima em* $(-\infty, -\sqrt{3})$ *e* $(0, \sqrt{3})$*. Alem disso,* $x = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$ *são pontos de inflexão da curva.*
- *Teremos os seguintes sinais para* f' *e* f''*:*

f'	
$x < 0$	$x > 0$
+	+

f''			
$x < -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < 0$	$0 < x < \sqrt{3}$	$x > \sqrt{3}$
+	-	+	-

Analisando os sinais, notamos que o ponto $x = 0$ *não é um ponto nem de minimo nem de máximo.*

- *Calculando os limites relevantes, teremos*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{1+x^2} = -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{1+x^2} = \infty$$

portanto, $f(x)$ *não possui assintotas.*

- *Teremos o seguinte esboço para o gráfico*

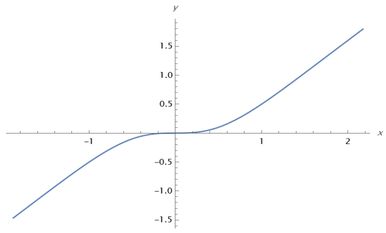


Figura 11: $f(x) = \frac{x^3}{(1+x^2)}$

(c)

- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$;
- $f(x) = 0 \implies x = 0$;
- $f'(x) = e^{-2x}(1-2x) = 0 \implies x = \frac{1}{2}$. *Portanto,* f *é crescente em* $x < \frac{1}{2}$ *e decrescente em* $x > \frac{1}{2}$;
- $f''(x) = 4e^{-2x}(x-1) = 0 \implies x = 1$. *Temos que* $f'' < 0$ *em* $x < 1$ *e* $f'' > 0$ *em* $x > 1$. *Portanto,* f *tem concavidade para baixo em* $x < 1$ *e concavidade para cima em* $x > 1$. *Alem disso,* $x = 1$ *é um ponto de inflexão da curva.*
- *Teremos os seguintes sinais para* f' *e* f'':

f'		f''	
$x < \frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$	$1 < x$	$x > 1$
+	-	-	+

Analisando os sinais, temos que o ponto $x = \frac{1}{2}$ *é um ponto de máximo da função.*

- *Calculando os limites relevantes, teremos*

$$\lim_{x \to -\infty} xe^{-2x} = -\infty$$
$$\lim_{x \to \infty} xe^{-2x} = 0$$

portanto, $f(x)$ *possui uma assintota horizontal* $x = 0$.

- *Teremos o seguinte esboço para o gráfico*

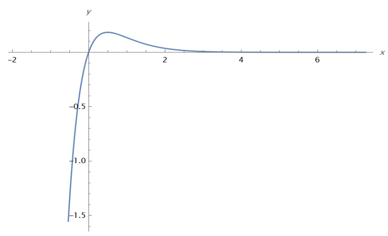


Figura 12: $f(x) = xe^{-2x}$

Exercício 12 *Note que*

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - (-2x+1)] = \lim_{x\to\infty}\frac{3}{x-2} = 0.$$

Dessa forma, $y = -2x + 1$ *é a assíntota oblíqua.*

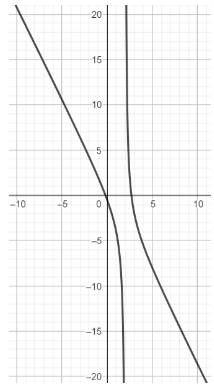


Figura 13: Gráfico de y.

Exercício 13 *Para sabermos a distância entre dois pontos* $p_1 = (a, b)$ *e* $p_2 = (c, d)$ *se usa a equação* $\Delta S = \|p_1 - p_2\| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$. *Com isso apenas temos que definir quem são os pontos* p_1 *e* p_2.
De acordo com a equação da curva $y = 2/x$ *podemos escrever* p_1 *como* $p_1 = (x, 2/x)$, *enquanto o ponto* p_2 *pode ser a origem* $p_2 = (0, 0)$.
Com esses valores definidos podemos joga-los na equação da distância, o que resulta em $\Delta S = \sqrt{(x-0)^2 + (2/x-0)^2} = \sqrt{(x)^2 + (2/x)^2} = \sqrt{\frac{x^4+4}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^4+4}}{x}$.
Para determinarmos o valor de x *em que a distância* ΔS *é mínima temos que encontrar os seus pontos de máximo e mínimo, e para isso podemos nos utilizar da derivada.*
Sendo $\Delta S(x) = \frac{\sqrt{x^4+4}}{x}$, *temos que os pontos em que* $\Delta S'(x) = 0$ *são os pontos onde a função pode ser um mínimo.*
Assim fazemos que $\Delta S'(x) = \frac{d\frac{\sqrt{x^4+4}}{x}}{dx} = \frac{\frac{1}{2}\frac{4x^3}{\sqrt{x^4+4}}x - \sqrt{x^4+4}}{x^2} = \frac{\frac{2x^4-x^4-4}{\sqrt{x^4+4}}}{x^2} = \frac{x^4-4}{x^2\sqrt{x^4+4}}$.
Para $\Delta S'(x) = 0$, $x^4 - 4 = 0$ *sem que* $x^2\sqrt{x^4+4} = 0$, *o que é cumprido para* $x = \sqrt{2}$.
Portanto, o valor de x *que faz com que* $y = 2/x$ *fique o mais próximo possível da origem é* $x = \sqrt{2}$, *que é o ponto* $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Exercício 14 *Nessa questão usa-se a mesma ideia que foi usada anteriormente. Pelo posição de* P *ser dada pela função* $x = \sqrt{t}$, *sua posição* $p_P = (\sqrt{t}, 0)$.
Já pela de Q *ser representada por* $y = t^2 - 3/4$, *temos que* $p_Q = (0, t^2 - 3/4)$.
Com isso podemos escrever a função $\Delta S(t)$ *que descreve a distância entre eles no tempo como* $\Delta S(t) = \sqrt{(\sqrt{t}-0)^2 + (0-(t^2-3/4))^2} = \sqrt{t + (3/4 - t^2))^2} = \sqrt{t^4 - 3/2t^2 + t + 9/16}$.
Com essa função podemos encontrar os pontos mínimos ao calcular o t em que $\Delta S'(t) = 0$: $\Delta S'(t) = \frac{1}{2}\frac{4t^3-3t+1}{\sqrt{t^4-3/2t^2+t+9/16}}$, *assim temos que achar* $t >= 0$ *que faz com que* $4t^3 - 3t + 1 = 0$ *e* $\sqrt{t^4 - 3/2t^2 + t + 9/16} \neq 0$.

Temos que $t = -1$ *é raiz de* $4t^3 - 3t + 1$*, portanto podemos escrever a equação como* $4t^3 - 3t + 1 = (t+1)(4t^2 - 4t + 1)$*, assim apenas temos encontrar as raízes de* $4t^2 - 4t + 1$*. Usando Bhaskara temos* $\Delta = 16 - 4 \cdot 4 = 0 \to t = \frac{4}{8} = 1/2$*.*
Assim descobrimos que para $t = 1/2$ *a distância entre P e Q é a mínima.*

Exercício 15 *Considere* $f(x) = x^2 - 2x + 1$*. Assim,* $f'(x) = 2x - 2$ *e consequentemente,* $x = 1$ *é ponto crítico.*

Note que f *é decrescente em* $(-\infty, 1)$ *e crescente em* $(1, \infty)$*, logo* $x = 1$ *é o ponto mínimo global de* f*. Assim,* $f(x) \geq f(1) = 0$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*

Isso implica que $x^2 + 1 \geq 2x$*, para todo* x*.*

Em particular, vale a equação acima para $x = a$*,* $x = b, x = c$ *e* $x = d$*. Multiplicando essas quatro equações, obtemos*

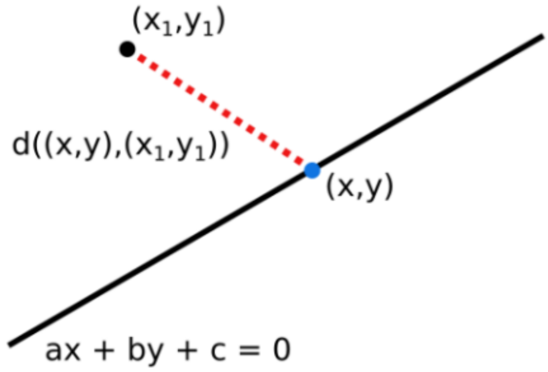
$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1) \geq 2a2b2c2d.$$

Logo,

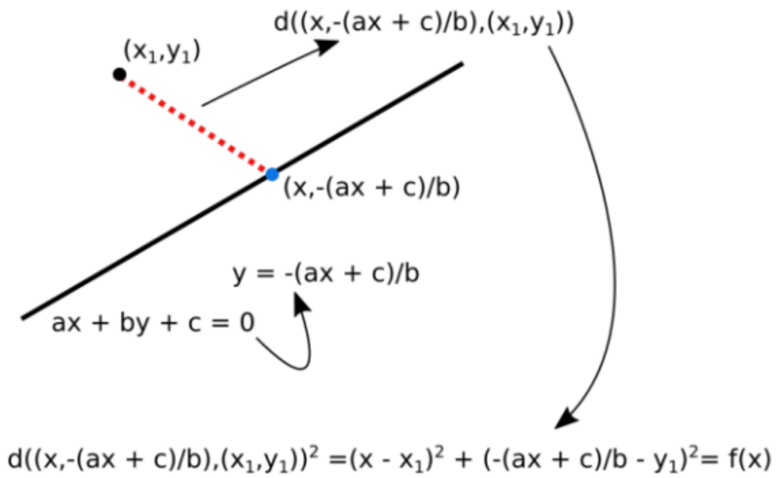
$$\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)}{abcd} \geq 16.$$

Exercício 16 *Assuma que* x *e* y *são respectivamente a base e a altura do retângulo, isso significa que o perímetro para a parte retangular é* $x + 2y$ *e do semicírculo* $\pi\frac{x}{2}$*.*
Com isso temos que $x + 2y + \pi\frac{x}{2} = 6u.a$*, ou seja* $y = 3 - \frac{2+\pi}{4}x$*.*
De acordo com a questão, a parte do semicírculo deixa menos luz passar, portanto podemos criar a função sobre a passagem de luz $L(x,y) = x \cdot y + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^2\frac{\pi}{2} = x \cdot y + \frac{\pi}{12}x^2 = x(y + \frac{\pi}{12}x) = x(3 - \frac{2+\pi}{4}x + \frac{\pi}{12}x) = x(\frac{36-(6+2\pi)x}{12}) = \frac{36x-(6+2\pi)x^2}{12}$*.*
Assim temos que a luz que passa é definida por $L(x) = \frac{36x-(6+2\pi)x^2}{12}$*, e para encontrar o seu máximo temos que achar os valores de* x *para quais* $L'(x) = 0 = \frac{36-(6+2\pi)2x}{12} = \frac{9-(3+\pi)x}{3}$*, que é* $x = \frac{9}{3+\pi}$*.*
Portanto, o vitral tem máxima passagem de luz para $x = \frac{9}{3+\pi} \approx 1.46u.c$ *e* $y = 3 - \frac{2+\pi}{4} \cdot \frac{9}{3+\pi} \approx 1.12u.c$*.*

Exercício 17 *Primeiro denotemos* (x_1, y_1) *como um ponto arbitrariamente escolhido,* (x, y) *como um ponto pertencente a reta* $ax + by + c = 0$ *e* $d((x,y),(x_1,y_1))$*, como a distância entre os dois pontos,*



por (x, y) *pertencer a uma reta, podemos fazer com que* y *dependa de* x*, e consequentemente que a função da distância dependa também apenas de* x*. Para fazer isso isolamos* y *da equação da reta e obtemos* $y = -\frac{ax+c}{b}$*, assim temos que* $(x, y) = (x, -\frac{ax+c}{b})$*. Vamos chamar o quadrado da distância entre os dois pontos de f, por termos agora que a função da distância apenas depende de x, podemos fazer* $f(x) = d((x, -\frac{ax+c}{b}, (x_1, y_1))^2 = (x - x_1)^2 + (-\frac{ax+c}{b} - y_1)^2$*,*



Queremos achar o valor de x *em que a distância (*$f(x)$*) é mínima (*$f'(x) = 0$*), o qual iremos chamar de* x_0*, assim temos*

$$f'(x) = 2(x - x_1) - \frac{a}{b} \cdot 2 * (-\frac{ax + c}{b} - y_1),$$

$$f'(x_0) = 2(x_0 - x_1) - \frac{a}{b} \cdot 2 * (-\frac{ax_0 + c}{b} - y_1) = 0,$$

isolando x_0*,*

$$x_0 = \frac{b^2 x_1 - aby_1 - ac}{(a^2 + b^2)}.$$

Portanto, sabendo o valor em que a distância é mínima, podemos descobrir qual é o valor que essa distância ao quadrado toma,

$$f(x_0) = \frac{(ax_1 + by_1 + c)^2}{a^2 + b^2},$$

que se tomarmos a raiz obtemos,

$$\frac{|(ax_1 + by_1 + c)|}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

que é a equação para se calcular a distância mínima entre um ponto e uma reta, que é o equivalente a encontrar a distância entre um ponto (x_1, y_1) *e o ponto* (x_0, y_0) *mais próximo que pertença a reta.*

Para confirmar que o valor de x_0 *encontrado é realmente o valor que gera o mínimo podemos reescrever* $f'(x)$ *com* x_0*, a qual fica*

$$f'(x) = \frac{2(a^2 + b^2)}{b^2}(x - x_0).$$

Assim, para $x > x_0$ *temos que* $f'(x) > 0$*, e para* $x < x_0$ *temos* $f'(x) < 0$*. Portanto, pelo teste da primeira derivada concluímos que* x_0 *é o único valor que faz com que* $f(x)$ *chegue ao seu mínimo.*

Exercício 18 *Primeiramente perceba que* $\lim\limits_{x\to\infty} = \infty$ *e* $\lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty$*, pois é uma função polinomial. Agora,* $f(-2) = -14$ *e* $f(-1) = 2$*, ou seja, há uma mudança de sinal e como* f *é contínua pelo teorema do valor intermediário existe* $c \in [-2, -1]$*, tal que* $f(c) = 0$*. Vamos verificar que* f*, não tem mais raízes reais. De fato, vamos usar sua derivada,* $f'(x) = 3x^2 - 6x$*. Com isso,* f *é estritamente decrescente no intervalo* $[0, 2]$ *e* $f(x) > 0$ *para todo* $x \in [0, 2]$*. Além disso,* f *é estritamente crescente* $(-\infty, 0)$ *e* $(2, \infty)$*, com apenas uma mudança de sinal no intervalo* $[-2, -1]$*. Portanto,* f *admite apenas uma raiz real. E como pode-se notar, o intervalo em que descobrimos que* $f(x) = 0$ *é o intervalo* $x \in [-2, -1]$*, que têm amplitude 1.*

Exercício 19 *Considere a função* $f(x) = \operatorname{sen}(x) - x + \frac{x^3}{3!}$*. Note que* $f(0) = 0$*. Vamos verificar que, esta função é estritamente crescente. Para isso perceba que* f *é derivável para* $x > 0$*, logo*

$$f'(x) = \cos(x) + \frac{x^2}{2} - 1.$$

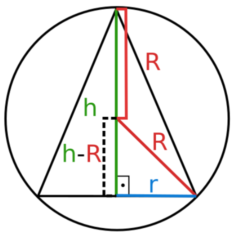
Note que $f'(x) > 0$ *para* $x > 0$ *e assim* f *é estritamente crescente no intervalo* $(0, +\infty)$*, como* $f(0) = 0$*, temos que* $f(x) > 0$ *para todo* $x \in (0, +\infty)$ *e dessa forma,* $\operatorname{sen}(x) > x - \frac{x^3}{3!}$*.*

Exercício 20 *(a) Queremos* $x > 0$ *tal que* $x + \frac{1}{x^2}$ *seja o minimo possível. Seja* $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$*. Derivando* $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3} = \frac{x^3 - 2}{x^3}$*, logo* $f'(x) = 0$ *se, e somente se,* $2 - x^3 = 0$

e com isso $x = \sqrt[3]{2}$. *Agora, para* $x \in (0, \sqrt[3]{2})$ *a função é estritamente decrescente, pois* $f'(x) < 0$. *Contudo, para* $x > \sqrt[3]{2}$, $f'(x) > 0$ *o que torna* f *estritamente crescente, logo* $\sqrt[3]{2}$ *é ponto de mínimo.*

(b) *Os números positivos procurados são* x *e* y *tais que* $y + x = 16$, *ou seja,* $y = 16 - x$. *Seja* $f(x) = xy = x(16 - x)$. *Então* $f'(x) = 16 - 2x$. *Temos* $f'(x) = 0$ *para* $x = 8$. *Mas, para* $x \in (0, 8)$ $f'(x) > 0$ *o que torna estritamente crescente e para* $x \in (8, 16)$ *temos* $f'(x) < 0$ *o que torna* f *estritamente decrescente, logo* $x = 8$ *é máximo local. Portanto, os números procurados são* $x = 8$ *e* $y = 8$.

Exercício 21 *Primeiro temos que ver como as medidas do raio da esfera,* R, *o raio do cone* r *e a altura do cone* h *se relacionam quando o cone é inscrito na esfera. Fazendo um desenho lateral da situação notamos que essas medidas formam um triângulo retângulo.*



E relacionando os lados com o teorema de Pitágoras chegamos na fórmula $R^2 = r^2 + (h - R)^2$. *Desenvolvendo, obtemos* $r^2 = 2hR - h^2$. *Da fórmula do volume do cone* $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, *substituindo o valor de* r^2, *obtemos que o volume é escrito em função de* h,

$$V(h) = \frac{\pi}{3} 2h^2 R - h^3.$$

Derivando em relação a h, $V'(h) = \frac{\pi}{3} h(4R - h)$ *e isso é zero se, e somente se,* $h = \frac{4}{3}R$, *já que* h *não pode ser zero. Logo, para* $h \in (0, \frac{4}{3}R)$, $V'(h) > 0$ *o que torna* V *estritamente crescente e se* $h \in (\frac{4}{3}R, 2R)$, $V'(h) < 0$ *o que torna* V *estritamente decrescente. Portanto,* $\frac{4}{3}R$ *é ponto de máximo local, ou seja, a altura de um cone circular reto, de volume máximo, inscrito em uma esfera de raio R é dado por* $h = \frac{4}{3}R$.

Exercício 22 *Como um lado já está protegido, temos que um retângulo de lados* x *e* y *tem comprimento* $C = x + 2y$. *Além disso, por hipótese,* $x \cdot y = 50$, *logo* $y = \frac{50}{x}$. *Substituindo no comprimento, e considerando a função* $f(x) = x + \frac{100}{x}$. *Derivando,* $f'(x) = 1 - \frac{100}{x^2} = \frac{x^2 - 100}{x^2}$. *Então,* $f'(x) = 0$ *se, e somente se,* $x = \pm 10$. *Mas como estamos lidando com medidas, descartamos o número negativo. Agora se,* $x > 10$ $f'(x) >$

0 então f é estritamente crescente, caso contrário $f'(x) < 0$ *então f é estritamente decrescente, o que torna* $x = 10$ *um ponto de mínimo da função. Como* $y = \dfrac{50}{x}$ *segue que para* $x = 10$ *temos* $y = 5$ *e assim, os comprimentos da cerca de menor comprimento é* 5m *e* 10m.

Exercício 23 *Temos que* $V_{cil} = 1 = A_b h = \pi r^2 h$, *logo* $r^2 h = \frac{1}{\pi}$. *Além disso,* $A_{lateral} + A_b = 2\pi r h + \pi r^2$ *e assim* $\text{Custo}_{lat+fundo} = 5(2\pi r h + \pi r^2)$. *Como* $A_{tampa} = \pi r^2$, *logo* $\text{Custo}_{tampa} = 10\pi r^2$. *Assim, a função custo total é*

$$\begin{aligned}
C = \text{Custo}_{lat+fundo} + \text{Custo}_{tampa} &= 10\pi r^2 + 10\pi r h + 5\pi r^2 \\
&= 15\pi r^2 + 10\pi r h \\
&= 5\pi\left(3r^2 + 2rh\right) \\
&= 5\pi\left(3r^2 + 2r\left(\frac{1}{\pi r^2}\right)\right) \\
&= 5\pi\left(3r^2 + \frac{2}{\pi r}\right).
\end{aligned}$$

Logo, $C' = 5\pi(6r - \frac{2}{\pi r^2})$. *Então, para minimizar o custo, temos que* $C' = 0$, *isto é*

$$\begin{aligned}
6r - \frac{2}{\pi r^2} &= 0 \\
6r^3 - \frac{2}{\pi} &= 0 \\
r^3 &= \frac{1}{3\pi} \\
r &= \frac{1}{\sqrt[3]{3\pi}}.
\end{aligned}$$

Portanto, as dimensões da caixa que minimizem o custo do material empregado vão ter que ser $r = \frac{1}{\sqrt[3]{3\pi}}$ *e* $h = \frac{1}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{9}{\pi}}$.

Exercício 24 *(a) Seja* h *a altura da pirâmide e* r *o raio do círculo circunscrito base. Logo,* $h^2 = l^2 - r^2$. *Por outro lado, como a pirâmide tem* n *faces, tem-se* $n-1$ *faces laterales e assim, a circunferência circunscrita determina no polígono da base os ângulos centrais de medida* $\alpha = \frac{2\pi}{n-1}$ *radianes. Com isto,* $A_{base} = (n-1)\frac{r.r\,\text{sen}\,\alpha}{2}$. *Logo, tem-se a função*

$$\begin{aligned}
f = V_{pir} h = \frac{A_{base} h.h}{3} \\
&= (n-1)\frac{h^2 r^2}{6}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{n-1}\right) \\
&= \frac{r^2(n-1)(l^2 - r^2)\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{n-1}\right)}{6} \\
&= -\frac{(n-1)\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{n-1}\right) r^4}{6} + \frac{(n-1)\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{n-1}\right) l^2 r^2}{6}.
\end{aligned}$$

Como queremos que dita função atinja o máximo e dita função é uma parábola, tem-se que

$$\begin{aligned} r^2 &= -\frac{\frac{(n-1)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n-1}\right)l^2}{6}}{-2\frac{(n-1)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n-1}\right)}{6}} \\ &= \frac{l^2}{2}, \end{aligned}$$

logo $r = \frac{l\sqrt{2}}{2}$.

(b) A expressão desse produto máximo é

$$\begin{aligned} f &= -\frac{(n-1)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n-1}\right)l^4}{24} + \frac{(n-1)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n-1}\right)l^4}{12} \\ &= \frac{(n-1)l^4}{24}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n-1}\right). \end{aligned}$$

Exercício 25 *Temos que* $x'(t) = v(t) = 2t - 3$, *logo fazendo a integração infefinida teremos que* $x(t) = t^2 - 3t + C$. *Mas como temos que no instante* $t = 0$, *a posição da partícula é* $x = 5$, *logo* $x(t) = t^2 - 3t + 5$. *Assim, para achar o mínimo precisamos que* $x'(t) = 0$, *isto é* $2t - 3 = 0$, *e portanto o mínimo vai ser atingido no instante* $t = \frac{3}{2}$.

Exercício 26 *A área do sólido é* $A_{sol} = 2\pi rh + 2\pi r^2 + \pi r^2 = 5\pi$, *assim* $rh = \frac{5-3r^2}{2}$. *O volume do sólido é* $V = \pi r^2 h + \frac{2\pi r^3}{3}$, *logo,*

$$\begin{aligned} V &= \pi r\left(\frac{5-3r^2}{2}\right) + \frac{2\pi r^3}{3} \\ &= \frac{5\pi r}{2} - \frac{5\pi r^3}{6}. \end{aligned}$$

Para que o volume seja máximo, devemos ter que

$$\begin{aligned} 0 = V' &= \frac{5\pi}{2} - \frac{5\pi r^2}{2} \\ \frac{5\pi}{2} &= \frac{5\pi r^2}{2} \\ r &= 1, \end{aligned}$$

logo $h = \frac{5-3}{2} = 1$.

Exercício 27 *Seja* L *o lucro pela venda e* x *o número de centavos. Notemos que o preço de venda e a quantidade a ser vendida de acordo com as condições do problema são* $1.50 - 0.01x$ *e* $500 + 25x$, *respectivamente. Da mesma maneira o preço de compra é de* 0.70. *Logo, a função* L *é*

$$\begin{aligned} L(x) &= (1.50 - 0.01x)(500 + 25x) - 0.70(500 + 25x) \\ &= (0.80 - 0.01x)(500 + 25x) \\ &= 400 + 15x - 0.25x^2. \end{aligned}$$

Para maximizar o lucro devemos ter que

$$0 = L'(x) = 15 - 0.5x$$
$$x = 30.$$

Logo, o preço de venda para maximizar o lucro deve ser de $1.5 - 0.01(30) = 1.20$ *unidades monetárias.*

Exercício 28 *Note que* $\cos\theta = x/3$. *Seja* $d(A, B)$ *a distância de* A *até* B, *temos que* $d(A, B) = 2x = 6\cos\theta$. *Além disso, se* $d(B, C)$ *é o comprimento do arco que liga* B *e* C, $d(B, C) = 6\theta$.

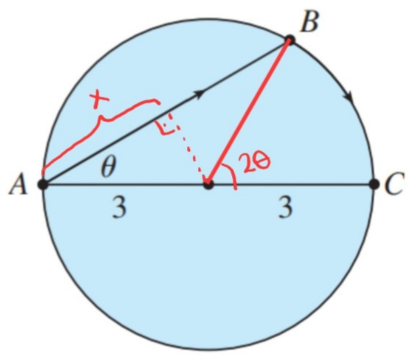
Seja t *a função que denota o tempo utilizado no percurso, temos que, para* $\theta \in [0, \pi/2]$,

$$t(\theta) = \frac{d(A, B)}{3} + \frac{d(B, C)}{6} = 2\cos\theta + \theta.$$

Vamos procurar extremos da função em $(0, \pi/2)$:

$$t'(\theta) = -2\sin\theta + 1$$
$$\Rightarrow t'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = 1/2 \Leftrightarrow \theta = \pi/6$$

Observe que $t(\pi/6) = \sqrt{3} + \pi/6$. *Resta observar o que acontece nos extremos do intervalo. Como* $t(0) = 2$ *e* $t(\pi/2) = \pi/2$, *a mulher deve caminhar todo o percurso.*



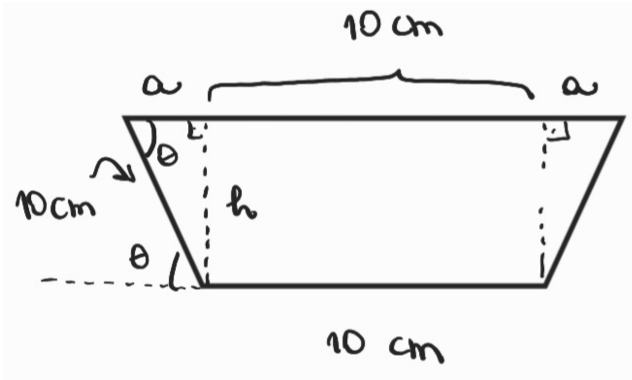
Exercício 29 *Note que* $a = 10\cos\theta$ *e* $h = 10\sin\theta$. *Então, seja* $A(\theta)$ *a área do trapézio,*

$$A(\theta) = \frac{(10 + (10 + 2a)) \cdot h}{2} = 100(1 + \cos\theta)\sin\theta$$
$$\Rightarrow A'(\theta) = 100[-\sin^2\theta + (1 + \cos\theta)\cos\theta].$$

Portanto,

$$A'(\theta) = 0 \Leftrightarrow -\sin^2\theta + \cos^2\theta + \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 1/2 \Leftrightarrow \theta = \pi/3.$$

Observe que $A(\pi/3) = 75\sqrt{3}$. *Resta observar o que acontece em* $\theta = \pi/2$. *Como* $A(\pi/2) = 100$, *temos que* $\theta = \pi/3$ *é o ângulo que maximiza o volume da calha.*



Exercício 30 *Fórmulas:*

$$V_1 = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H}{3}$$

$$V_2 = \pi \cdot r^2 \cdot h = 2\pi \cdot r^3$$

Observando a figura abaixo,

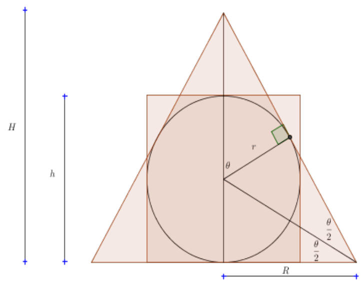


Figura 14: Projeção em 2D do exercício

temos

$$\tan\theta = \frac{H}{R}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{r}{R}$$

$$h = 2r$$

Do enunciado,

$$k = \frac{V_1}{V_2} = \frac{R^2 \cdot H}{6r^3} = \frac{\tan\theta}{6\tan^3\frac{\theta}{2}}$$

O valor mínimo será encontrado derivando a função, mas para facilitar vamos transformar,

$$k = \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{6\frac{\sin^3\frac{\theta}{2}}{\cos^3\frac{\theta}{2}}}$$

$$k = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos^4\frac{\theta}{2}}{6\sin^3\frac{\theta}{2}(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2})}$$

Arrumando,

$$k = \frac{(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2})^2}{3 \sin^2 \frac{\theta}{2}(1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2})}$$

Fazendo

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = a$$

$$k = \frac{(1 - a)^2}{3a(1 - 2a)}$$

Pra encontrar o mínimo de k, devemos fazer

$$k' = 0$$

.

Sabemos que,

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Assim temos,

$$k' = \frac{2(1 - a)(-1)(3a(1 - 2a)) - (1 - a)^2[3(1 - 2a + 3a(-2))]}{[3a(1 - 2a)]^2}$$

Desenvolvendo encontramos,

$$k' = \frac{(a - 1)(1 - 3a)}{3a^2(1 - 2a)}$$

Desta forma encontramos,

$$a = 1$$

$$a = \frac{1}{3}$$

Portanto o valor mínimo será:

$$k = \frac{(1 - \frac{1}{3})^2}{3 \cdot \frac{1}{3}(1 - 2 \cdot \frac{1}{3})}$$

$$\therefore k = \frac{4}{3}$$

Exercício 31 *Seja* t_f *o tempo em que a corrida termina, temos, por hipótese, que* $f(0) = g(0) - h(0) = 0$ *e* $f(t_f) = g(t_f) - h(t_f) = 0$.

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (0, t_f)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(t_f) - f(0)}{t_f} = 0.$$

Como $f'(c) = g'(c) - h'(c)$, *temos que* $g'(c) = h'(c)$, *isto é, em* $t = c$ *os dois corredores tinham a mesma velocidade.*