Lista de Exercícios de SMA0301-Cálculo I – Módulo 5

Regras de L'Hospital

Exercício 1 *(a) Quais as indeterminações que você pode tentar manipular e depois usar a regra de L'Hospital para resolver o limite?*

(b) Em quais indeterminações se pode aplicar a regra de L'Hospital diretamente sem nenhuma manipulação anterior na função.

(c) A regra de L'Hospital pode ser usada para calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$*?*

(d) De um exemplo de resolução utilizando L'Hospital para cada uma das indeterminações do item (a)

Exercício 2 *Calcule os limites usando a regra de de L'Hospital sempre que possível:*

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\ln(\cos(x))}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\operatorname{sen}(x))}{\ln(x)}$ (c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln(x)}\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ (e) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2-1}\right)}{\ln(x+3\sqrt{x^2-1})}$ (f) $\lim\limits_{x\to +\infty}x^3\left(\arctan(x)-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{x}\right)$

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\pi 3^x)}{x}$ (h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\operatorname{sen}(x))}{\operatorname{sen}(2x)}$ (i) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$

(j) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\ln(x)}$

Exercício 3 *Demonstre que*

(a) $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ (b) $g(x)=\dfrac{\arctan(x^4-x^2)}{x}$

(c) $h(x)=x^2\log|x|$ (d) $u(x)=|x|^x$

podem ser prolongadas por continuidade em $x=0$*. As novas funções assim obtidas são diferenciáveis em* $x=0$*?*

Exercício 4 *Use a Regra de L'Hospital para calcular limite da forma indeterminada* $\dfrac{0}{0}$

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{4x^3-x-3}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$ (d) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(t^2)}{t}$

(e) $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\theta-\pi}{\cos(2\pi-\theta)}$ (f) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{3^{\operatorname{sen}(\theta)}-1}{\theta}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x2^x}{2^x-1}$

Exercício 5 *Use a Regra de L'Hospital para calcular limite da forma indeterminada* $\dfrac{\infty}{\infty}$

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x}{x^3+x+1}$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-2x}{7x^3+3}$ (c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{\log_2(x)}$

Exercício 6 *Use a Regra de L'Hospital para calcular o limite de outras formas de indeterminação.*

(a) $\lim_{x\to 0^+} x(\ln(x))^2$

(b) $\lim_{x\to 0^+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

(c) $\lim_{x\to\infty} (\ln(x))^{\frac{1}{x}}$

(d) $\lim_{x\to\infty} (1+2x)^{\frac{1}{2\ln(x)}}$

(e) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x}}$

(f) $\lim_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{1-x}}$

(g) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{e^x-1}\right)$

(h) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{1-\cos(x)} - \frac{1}{x^2}\right)$

Exercício 7 *Encontre o limite. Use a regra de L'Hospital quando for apropriado. Se houver um método mais elementar, considere utilizá-lo. Se a regra de L'Hospital não se aplicar, explique o porquê.*

(a) $\lim_{x\to a^+} \dfrac{\cos x \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$

(b) $\lim_{x\to\infty} (x - \ln x)$

Polinômios de Taylor

Exercício 8 *Em cada um dos itens abaixo, encontre o polinômio de Taylor de grau* n *da função* f *em torno de* x_0*.*

(a) $f(x) = \sqrt[k]{x}, k \in \mathbb{N},\ n = 2$ *e* $x_0 = 1$

(b) $f(x) = \ln(1+x),\ n = 3$ *e* $x_0 = 0$

(c) $f(x) = \cos x,\ n \in \mathbb{N}$ *e* $x_0 = 0$

(d) $f(x) = x^x,\ n = 1$ *e* $x_0 = 1$

(e) $f(x) = e^{x^2},\ n = 2$ *e* $x_0 = 0$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2},\ n = 2$ *e* $x_0 = 0$

Exercício 9 *Seja* $y = f(x)$ *uma função de classe* C^2 *tal que o ponto* $(x, f(x))$ *é solução da equação* $x^2 + \dfrac{y^2}{3} = 1,\ \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$. *Sabendo-se que* $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3}{2}$, *determine o polinômio de Taylor de* f *de grau dois em torno de* $x_0 = -\dfrac{1}{2}$.

Exercício 10 *Encontre o polinômio de Taylor de ordem cinco em torno da origem da função* $f(x) = \mathrm{sen}(x)$. *Use este polinômio para aproximar* $\mathrm{sen}(x)$ *para* $x \in [-\pi/32, \pi/32]$ *e mostre que o erro cometido nesta aproximação é menor que* 10^{-9}.
Dica: *Use que* $|\mathrm{sen}(c)| \leq c$ *e que* $\pi/32 < 10^{-1}$.

Exercício 11 *Encontre o polinômio de Taylor de ordem cinco em torno da origem da função* $f(x) = \cos(x)$. *Use este polinômio para aproximar* $\cos(x)$ *para* $x \in [-\pi/32, \pi/32]$ *e mostre que o erro cometido nesta aproximação é menor que* $\frac{1}{720}10^{-6}$.
Dica: *Use que* $\pi/32 < 10^{-1}$.

Exercício 12 *Seja* $n \in \mathbb{N}$. *Justifique a validade e estime o erro cometido na aproximação*

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

Exercício 13 *Utilizando o polinômio de Taylor de ordem 3, calcule um valor aproximado de*

$$(a)\ \ln(1.3) \qquad (b)\ \sqrt[3]{8.2} \qquad (c)\ \mathrm{sen}(0.1) \qquad (d)\ \cos(0.1)$$