Aula 12: Algumas propriedades sobre produto

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

1^o **Semestre de 2023 - Curso de Topologia**

Vamos começar provando que os axiomas de enumerabilidade são preservados por produtos enumeráveis. Alguns destes resultados podem ser melhorados (ver exercícios a seguir).

Proposição 1

Seja $((X_n, \tau_n))_{n\in\mathbb{N}}$ familia de espaços que satisfazem o i-ésimo axioma de enumerabilidade. Então, $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ também satisfaz o i-ésimo axioma de enumerabilidade.

Demonstração. Primeiro axioma de enumerabilidade (base locais enumeráveis): Seja $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Seja, também, $\mathcal{V}_n$ base local enumerável para cada x_n. Sem perda de generalidade, suponha que $X_n \in \mathcal{V}_n$. Note que

$$\left\{ \prod_{n\in\mathbb{N}} V_n : V_n \in \mathcal{V}_n, \{m \in \mathbb{N} : V_m \neq X_m\} \text{ é finito } \right\}$$

é enumerável (cartesiano finito de enumeráveis é enumerável, união enumerável de enumeráveis é enumerável) e é uma base local para x.

De fato, seja $A = \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ aberto básico tal que $x \in A$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \neq X_n$, seja $V_n \in \mathcal{V}_n$ de forma que $x_n \in V_n \subset A_n$ (existe pois $\mathcal{V}_n$ é base local para x_n). Para n tal que $A_n = X_n$, defina $V_n = X_n$. Note que

$$x \in \prod_{n\in\mathbb{N}} V_n \subset \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Segundo axioma de enumerabilidade (base enumerável): Análogo (exercício).

Terceiro axioma de enumerabilidade (separabilidade): Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja D_n denso enumerável em X_n. Fixe $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Defina $D = \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} : \exists F \subset \mathbb{N}$ finito tal que, para todo $n \in F, y_n \in D_n$ e, para todo $n \notin F, y_n = x_n\}$.
Note que D é enumerável (pois $\{x_n\} \cup D_n$ é enumerável, cartesiano finito de enumeráveis é enumerável, união enumerável de enumeráveis é enumerável). Seja $\prod_{n\in\mathbb{N}} V_n$ aberto básico não vazio. Seja $F \subset \mathbb{N}$ finito tal que, para $n \notin F, V_n = X_n$. Para cada $n \in F$, seja $y_n \in V_n \cap D_n$. Note que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D \cap \prod_{n\in\mathbb{N}} V_n$, onde $y_n = x_n$, para $n \notin F$.

Vejamos agora o comportamento dos últimos axiomas de separação com relação ao produto, começando com a propriedade $T_{3\frac{1}{2}}$, que é preservada.

Definição 2

Dizemos que (X, τ) *é* $T_{3\frac{1}{2}}$ *se, para todo* $x_0 \in X$ *e* $F \subset X$ *fechado tal que* $x_0 \notin F$ *existir* $f : X \to [0, 1]$ *contínua, tal que* $f(x_0) = 0$ *e* $f(y) = 1$*, para todo* $y \in F$*. No caso que* (X, τ) *também é* T_1*, dizemos que* (X, τ) *é um espaço completamente regular.*

Proposição 3

Se cada (X_α, τ_α) é $T_{3\frac{1}{2}}$, então $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ é $T_{3\frac{1}{2}}$.

Demonstração. Seja $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ e $F \subset \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ fechado tal que $x \notin F$. Seja $V = \prod_{\alpha \in A} V_\alpha$ um aberto básico tal que $x \in V$ e $V \cap F = \emptyset$. Seja $G = \{\alpha \in A : V_\alpha \neq X_\alpha\}$. Para cada $\alpha \in G$, seja $f_\alpha : X_\alpha \to [0,1]$ contínua tal que $f_\alpha(x_\alpha) = 0$ e $f_\alpha(X_\alpha \setminus V_\alpha) = \{1\}$ (estamos usando $T_{3\frac{1}{2}}$ nas coordenadas).

Considere $f : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \to [0,1]$ dada por $f(y) = \max\{f_\alpha(y_\alpha) : \alpha \in G\}$, onde $y = (y_\beta)_{\beta \in A}$.

Note que $f(x) = 0$.

Além disso, $f(F) = \{1\}$, pois se $y \in F$, então existe α tal que $y_\alpha \notin V_\alpha$, com $\alpha \in G$ (caso contrário, teríamos $V \cap F \neq \emptyset$) e, portanto, $f_\alpha(y_\alpha) = 1$.

Resta provar que f é contínua.

De fato, para cada $\alpha \in G$, defina $g_\alpha = f_\alpha \circ \pi_\alpha$. Note que cada g_α é contínua (pois é composta de contínuas) e também que $f(x) = \max\{g_\alpha(x) : \alpha \in G\}$. Assim, f é contínua (ver exercícios).

Agora veremos que a propriedade T_4 não é preservada.

Proposição 4

$\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ não é um espaço normal, onde $\mathbb{R}_S$ é a reta de Sorgenfrey. Em particular, produto de espaços normais não é necessariamente normal.

Demonstração. Considere $\mathbb{R}_S$. Como já vimos, $\mathbb{R}_S$ é normal. Vamos mostrar que $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ não é normal. Considere $D = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}_S\}$. Note que D é discreto e fechado. De fato, os conjuntos da forma

$$[x, x+1) \times [-x, -x+1) \cap D = \{(-x, x)\}$$

são abertos em D e, portanto, D é discreto. Para verificar que D é fechado, basta notar que seu complementar é aberto (Exercício).

Algumas propriedades sobre produtos

Note que $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ é separável (Proposição 1). Logo, $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ tem um denso enumerável e um discreto fechado de tamanho contínuo. Logo, pelo Lema de Jones (ver Exercícios da Aula 8), $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ não é normal.

A aula 12 terminou aqui.

O próximo resultado é um bom teste para verificação de continuidade de uma função sobre a topologia (fraca) induzida por uma família de aplicações.

Teorema 5

Seja $f : (Z, \sigma) \to X$ uma função, onde consideremos em X a topologia τ induzida por uma família de aplicações $f_\alpha : X \to (X_\alpha, \tau_\alpha)$. Então f é contínua se, e somente se, para todo $\alpha \in A$, $f_\alpha \circ f$ é contínua.

Demonstração. Se f é contínua, então $f_\alpha \circ f$ é contínua (composta de contínuas).

Por outro lado, seja V um aberto básico de X. Logo, $V = \bigcap_{\alpha \in F} f_\alpha^{-1}(V_\alpha)$, onde F é finito e $V_\alpha \in \tau_\alpha$. Temos assim

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in F} f_\alpha^{-1}(V_\alpha)\right) = \bigcap_{\alpha\in F} f^{-1}\left(f_\alpha^{-1}(V_\alpha)\right)$$
$$= \bigcap_{\alpha\in F} (f_\alpha \circ f)^{-1}(V_\alpha).$$

Note que o último termo é aberto pois é interseção finita de abertos.

Propriedades do produto

Corolário 6

Seja $f : (Z, \sigma) \to \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ *uma função. Então* f *é contínua se, e somente se, para todo* $\alpha \in A, \pi_\alpha \circ f$ *é contínua.*

Demonstração. Considere $f_\alpha = \pi_\alpha : \prod_{\beta \in A} X_\beta \to X_\alpha$ no Teorema anterior.

Propriedades do produto

Vamos agora caminhar para um teorema que iremos usar diversas vezes no texto: o Teorema da Imersão.

Definição 7

Sejam $((X_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in A}$ *uma família de espaços topológicos,* (Z, τ) *um espaço topológico e* $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ *uma família de funções da forma* $f_\alpha : Z \to X_\alpha$. *Chamamos de função diagonal a função*

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha \in A} f_\alpha : \quad & Z \to \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \\ & z \mapsto (f_\alpha(z))_{\alpha \in A} \end{aligned}$$

Note que, pelo Corolário 6, obtemos:

Proposição 8

Se cada f_α *é contínua, então* $\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha$ *é contínua (e vale a recíproca).*

Demonstração: Note que $\pi_\beta \circ (\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha) = f_\beta$ para todo $\beta \in A$.

Veremos agora condições para que exista uma cópia de X dentro de um produto. Depois, veremos que tal produto tem boas propriedades, sendo algumas hereditárias - o que vai permitir concluir novas propriedades sobre o próprio X.

Definição 9

Dizemos que $f : X \to Y$ é uma imersão se $f : X \to f(X)$ é um homeomorfismo. Dizemos neste caso que Y contém uma cópia de X (como subespaço).

Definição 10

Seja $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to X_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Dizemos que $\mathcal{F}$ separa pontos se para quaisquer $x, y \in X$ distintos, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Dizemos que $\mathcal{F}$ separa pontos de fechados se, para todo $x \in X$ e $F \subset X$ fechado tal que $x \notin F$, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \notin \overline{f(F)}$.

Teorema 11 (Teorema da imersão)

Seja $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ familia de funções contínuas. Se $\mathcal{F}$ separa pontos, então $\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha : X \to \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ é injetora. Se, além disso, $\mathcal{F}$ separa pontos de fechados, então $\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha$ é uma imersão.

Demonstração. Sejam $x, y \in X$ distintos. Então existe $\beta \in A$ tal que $f_\beta(x) \neq f_\beta(y)$. Logo pois $\pi_\beta\left(\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha(x)\right) = f_\beta(x)$ e $\pi_\beta\left(\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha(y)\right)_\beta = f_\beta(y)$.

Já temos que a aplicação é contínua pela Proposição 8.

Do parágrafo acima, $\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha$ é injetora. Resta mostrar que $\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha(F)$ é fechado (na imagem) para todo $F \subset X$ fechado (pois disso segue que sua inversa é contínua).

Seja $z \in \overline{\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha(F)} \cap \Delta_{\alpha\in A} f_\alpha(X)$ onde $z = (z_\alpha)_{\alpha\in A}$. Seja $x \in X$ tais que $\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha(x) = z$.

Vamos mostrar que $x \in F$ (e, portanto, que $z \in \Delta_{\alpha\in A} f_\alpha(F)$).

Suponha que não. Logo existe $\beta \in A$ tal que $f_\beta(x) \notin \overline{f_\beta(F)}$ (pois tal família separa pontos de fechados). Seja $V_\beta \subset X_\beta$ aberto tal que $f_\beta(x) \in V_\beta$ e $V_\beta \cap f_\beta(F) = \emptyset$.

Para todo $\alpha \in A$, com $\alpha \neq \beta$, denote $V_\alpha = X_\alpha$. Seja $V = \prod_{\alpha\in A} V_\alpha$.

Note que $z \in V$, pois $z_\beta = f_\beta(x) \in V_\beta$.

Note que $V \cap \Delta_{\alpha\in A} f_\alpha(F) = \emptyset$, pois $V_\beta \cap f_\beta(F) = \emptyset$.

Logo $z \notin \overline{\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha(F)}$, contradição.

Proposição 12

Seja (X, τ) um espaço completamente regular. Então $\mathcal{F} = \{f : X \to [0,1] \mid f$ é contínua $\}$ separa pontos de fechados (em particular separa pontos).

Demonstração. Considere $F \subset X$ um fechado não vazio e $x \notin F$ (em particular se $Y = \{y\}$ com $x \neq y$). Por X ser $T_{3\frac{1}{2}}$, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) = 0$ e $f(Y) = \{1\}$. Logo, $0 \notin \{1\} = \overline{f(Y)}$.

Vamos mostrar uma aplicação importante do Teorema de Imersão.

Corolário 13

Seja (X, τ) espaço topológico. Então (X, τ) é completamente regular se, e somente se, existe A tal que (X, τ) é homeomorfo a um subespaço de $\prod_{\alpha \in A}[0, 1]$.

Demonstração. Como $[0, 1]$ é completamente regular, $\prod_{\alpha \in A}[0, 1]$ é completamente regular e, portanto, qualquer um de seus subespaços também é (T_1 e $T_{3\frac{1}{2}}$ são invariantes topológicos – Lembrar que todos os Axiomas de Separação são invariantes topológicos).

Reciprocamente, se (X, τ) for completamente regular, basta notar que $\mathcal{F} = \{f : X \to [0, 1] \mid f \text{ é contínua } \}$ separa pontos de fechados (e também pontos). Tome $A = \mathcal{F}$ e aplique o Teorema 11 (da Imersão).

Observação: Neste corolário, se denotarmos por $D : X \to \prod_{f \in \mathcal{F}}[0, 1]$ a função diagonal do Teorema 11, note que $D(x) = (f(x))_{f \in \mathcal{F}}$.

Exercícios - Propriedades do produto

1. Mostre que, se $f_1, \ldots, f_n : X \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, então $g(x) = \max\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ é contínua.
2. Mostre que o conjunto D construído na demonstração da Proposição 4 é fechado.
3. Mostre que, se cada $(X_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem base enumerável, então $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ também tem base enumerável.
4. Mostre diretamente que se (X, τ) e (Y, σ) são separáveis, então $X \times Y$ é separável.
5. Considere $((X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ espaços métricos. Sem perda de generalidade, podemos supor que cada d_n é limitada por 1 (ver o Exercício 1.4.15 das notas do Leandro).
   (a) Mostre que $d : \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \times \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \to \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = \sup\{d_n(x(n), y(n)) : n \in \mathbb{N}\}$ é uma métrica sobre $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$.
   (b) Mostre que não necessariamente a topologia induzida por esta métrica é a mesma que a topologia produto (induzida pela topologia de cada uma das coordenadas). Uma delas tem mais abertos que a outra. Qual?
   (c) Mostre que se o produto tiver apenas finitas coordenadas, ambas topologias coincidem.

6. O objetivo deste exercício é mostrar que $\mathbb{R}_S$ (reta de Sorgenfrey) não tem base enumerável de uma maneira alternativa.
   (a) Suponha que $\mathbb{R}_S$ tem base enumerável. Note que $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ também tem.
   (b) Considere $D = \{(x, -x); x \in \mathbb{R}_S\}$. Note que tal conjunto não tem base enumerável.
   (c) Lembre que subsespaço de conjunto com base enumerável também tem base enumerável. Chegue numa contradição.
7. Mostre que se $(X_i)_{i \in I}$ é uma família não enumerável tal que cada X_i tem pelo menos dois pontos, então todo G_δ (intersecção enumerável de abertos) não vazio em $\prod_{i \in I} X_i$ tem pelo menos dois pontos.

Exercícios - Propriedades do Produto

8. O objetivo deste exercício é mostrar que $\prod_{\alpha \in A} \mathbb{N}$ é separável se $|A| \leq \mathfrak{c}$ ($\mathbb{N}$ com a topologia usual).
   (a) Note que podemos supor sem perda de generalidade que $A \subset \mathbb{R}$. Seja $\mathcal{B}_0 = \{]p, q[\cap A : p < q \in \mathbb{Q}\}$. Note que $\mathcal{B}_0$ é enumerável.
   (b) Para cada $n > 0$, defina $\mathcal{B}_n$ o conjunto de todos os subconjuntos de $\mathcal{B}_0$ com exatamente n elementos e que sejam 2-2 disjuntos. Note que cada $\mathcal{B}_n$ é enumerável (use o fato que a quantidade de subconjuntos finitos de um conjunto enumerável é enumerável).
   (c) Fixe $n \geq 1$. Para cada $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ e cada $\{J_1, \ldots, J_n\} \in \mathcal{B}_n$ (vamos supor que $J_i < J_j$ se $i < j$ Isto é, todo elemento de J_i é menor que todo elemento de J_j). Defina $f_{(a_1,\ldots,a_n),\{J_1,\ldots,J_n\}} : A \to \mathbb{N}$ por

$$f_{(a_1,\ldots,a_n),\{J_1,\ldots,J_n\}}(\alpha) = \begin{cases} a_i \text{ se } \alpha \in J_i \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

   Note que o conjunto de todas estas funções é enumerável (com n fixado). Seja D o conjunto de todas essas funções (com n variando). Note que D também é enumerável.
   (d) Note que $D \subset \prod_{\alpha \in A} \mathbb{N}$.
   (e) Mostre que D é denso em $\prod_{\alpha \in A} \mathbb{N}$.

9. O objetivo deste exercício é mostrar que se cada (X_α, τ_α) é separável, então $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ também é separável se $|A| \leq \mathfrak{c}$.
   (a) Fixe $D_\alpha \subset X_\alpha$ denso enumerável em cada X_α. Mostre que $\prod_{\alpha\in A} D_\alpha$ é denso em $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$
   (b) Para cada $\alpha \in A$, seja $\varphi_\alpha : \mathbb{N} \to D_\alpha$ bijetora. Note que cada φ_α é contínua.
   (c) Defina $f : \prod_{\alpha\in A} \mathbb{N} \to \prod_{\alpha\in A} D_\alpha$. Mostre que f é contínua.
   (d) Conclua que $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ é separável.