Aula 11: Homeomorfismos e Espaço Produto

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

1º **Semestre de 2023 - Curso de Topologia**

Definição 1

Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos. Dizemos que uma função $f : X \to Y$ é um homeomorfismo, se f é bijetora, contínua e f^{-1} é contínua. Neste caso, dizemos que (X, τ) e (Y, σ) são homeomorfos.

Intuitivamente, mostrar que dois espaços dados são homeomorfos é "fácil" : basta exibir um homeomorfismo. Por outro lado, mostrar que dois espaços não são homeomorfos costuma ser uma tarefa mais "difícil": precisamos mostrar que não existe um homeomorfismo. Nesse sentido, encontrar invariantes topológicos é bastante útil, já que se um dos espaços satisfaz algum invariante enquanto o outro não, já temos automaticamente a não existência de homeomorfismos.

Definição 2

Chamamos uma propriedade P de um invariante topológico, se ela é preservada por homeomorfismos. Isto é, se (X, τ) e (Y, σ) são espaços homemorfos, então (X, τ) tem a propriedade P se, e somente se (Y, σ) tem P.

Exemplo 3

Todos os axiomas de separação e de enumerabilidade que apresentamos são invariantes topológicos.

Por exemplo, provamos na Proposição 25 da Aula 5 que se X é separável e $f : X \to Y$ é contínua e sobrejetora, então Y também é separável.

Assim, se f é um homeomoforfismo entre X e Y, temos que o fato de X ser separável implica Y ser separável. Já a função f^{-1} nos dá que Y ser separável implica que X também é.

Exercício: Faça a demostração para os axiomas 1 e 2 de enumerabilidade.

Nem tudo que é discutido no âmbito de espaços métricos é topológico.

Exemplo 4

Seja o conjunto $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. *Sobre este conjunto podemos ter a métrica* d_1, *herdada da métrica usual em* $\mathbb{R}$ *e, também, podemos ter a métrica discreta* d_2, *dada por*

$$d_2(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

O espaço (X, d_1) não é completo, pois $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy que não converge em (X, d_1). Por outro lado, (X, d_2) é completo, pois com a métrica discreta, qualquer espaço é completo.

A métrica d_1 induz a topologia τ sobre X que é a topologia induzida de $\mathbb{R}$ sobre X. Por outro lado, a métrica d_2 induz a topologia discreta σ sobre X. Note que, neste caso, $\tau = \sigma$. Portanto, a função $f : (X, d_1) \to (X, d_2)$, dada por $f(x) = x$ é um homeomorfismo.

Logo, apesar da propriedade "ser sequência convergente" ser um invariante topológico, a propriedade "ser sequência de Cauchy" não é.

O invariante topológico que de fato está envolvido aqui é "ser completamente metrizável", isto é, admitir uma métrica completa compatível com a topologia.

Vamos terminar esta seção mostrando alguns resultados envolvendo a topologia da ordem e dando uma caracterização para o reais (a menos de homeomorfismos).

Definição 5

Seja $(X, \leq)$ um conjunto ordenado. Dizemos que $\leq$ é uma ordem total se, para todo $x, y \in X$, vale $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Definição 6

Seja $(X, \leq)$ um conjunto totalmente ordenado. Chamamos de topologia da ordem sobre $(X, \leq)$ a topologia gerada pelos seguintes conjuntos (para todo $a, b \in X$):

(a) $(a, +\infty) = \{x \in X : a < x\}$

(b) $(-\infty, b) = \{x \in X : x < b\}$

Exemplo 7

As topologias usuais sobre $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}$ e $[0, 1]$ são as topologias induzidas pelas ordens usuais dos respectivos conjuntos.

Definição 8

Sejam $(X, \leq)$ e $(Y, \preceq)$ conjuntos ordenados. Dizemos que $f : X \to Y$ é um isomorfismo de ordem se f é bijetora e, para todo $a, b \in X$, temos $a \leq b$ se, e somente se, $f(a) \preceq f(b)$.

Definição 9

Seja $(X, \leq)$ um conjunto ordenado. Dizemos que $\leq$ é uma ordem densa se para todo $x, y \in X$, com $x < y$, existe $z \in X$ tal que $x < z < y$.

Exemplo 10

Os conjuntos $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ e $[0, 1]$ têm as ordens usuais densas enquanto $\mathbb{N}$ não tem.

Vamos apresentar uma maneira de caracterizar os reais com esta linguagem. Para isso, vamos apresentar antes outra caracterização interessante, mas esta sobre os racionais. O seguinte lema será bem útil na demonstração.

Lema 11

Seja $\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ conjunto totalmente ordenado e seja Y um conjunto totalmente ordenado com ordem densa e sem maior nem menor elemento. Dada $f : \{a_1, \ldots, a_n\} \to Y$ função injetora que preserva ordem, existe $\tilde{f} : \{a_1, \ldots, a_{n+1}\} \to Y$ extensão de f que é injetora e que preserva a ordem.

Demonstração. Note que só precisamos definir $\tilde{f}(a_{n+1})$ de forma a preservar a ordem. Temos três casos.

Caso 1: $a_{n+1} < a_k$ para todo $k \leq n$

Caso 2: $a_{n+1} > a_k$ para todo $k \leq n$

Caso 3: Existem $i, j \leq n$ tais que $a_i < a_{n+1}$ e $a_{n+1} < a_j$.

Vamos resolver o Caso 3, os outros são análogos. Sejam

$$E = \max\{a_i : a_i < a_{n+1}, i \leq n\}$$

$$D = \min\{a_j : a_{n+1} < a_j, j \leq n\}$$

Note que, como a ordem de Y é densa, existe $y \in \big(f(E), f(D)\big)$. Defina $\tilde{f}(a_{n+1}) = y$.

Teorema 12

Todo conjunto enumerável, totalmente ordenado com uma ordem densa e sem maior nem menor elementos é isomorfo (e, portanto, homeomorfo) a $\mathbb{Q}$.

Demonstração. Seja $(X, \leq)$ como no enunciado e $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma enumeração para X. Seja, também, $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma enumeração para $\mathbb{Q}$. Vamos definir indutivamente $f : X \to \mathbb{Q}$ um isomorfismo de ordem. Primeiramente, definimos $f(x_1) = q_1$.
Agora aplique o lema anterior para os conjuntos $\{x_1, x_2\}$ e $\mathbb{Q}$. Desta forma, temos definidos $f(x_1)$ e $f(x_2)$. Agora invertemos um pouco o papel e estendemos f^{-1} da seguinte forma: aplicamos o lema para $\mathrm{Im}(f) \cup \{q_k\}$ e X onde $k = \min\{n : q_n \notin \mathrm{Im}(f)\}$. Daí estendemos f^{-1} para q_k. No passo seguinte, invertemos novamente e aplicamos o lema para $\mathrm{dom}(f) \cup \{x_k\}$ e $\mathbb{Q}$, onde $k = \min\{n : x_n \notin \mathrm{dom}(f)\}$ e estendemos f para x_k. Continuamos esse processo, sempre alternando a extensão (entre f e f^{-1}). Note que, no final, temos que a f obtida preserva ordem e é injetora. Note que ela está definida para todo x_n, já que sempre tomamos o menor índice na hora de estender f e, da mesma forma, temos que f é sobrejetora pois sempre tomamos q_n de menor índice na hora de estender f^{-1}.

Para o homeomorfismo lembrar da base de topologia induzida por família de subconjuntos. Da monotonicidade, imagem de intervalos abertos, por f e f^{-1} são intervalos abertos.

Supremo/ínfimo

Definição 13

Seja $(X, \leq)$ um conjunto ordenado e $A \subset X$. Dizemos que:

- *$M \in X$ é uma cota superior para A, se $a \leq M$ para todo $a \in A$.*
- *A é limitado superiormente, se possuir uma cota superior (em X).*
- *$M \in X$ é uma cota inferior para A, se $M \leq a$ para todo $a \in A$.*
- *A é limitado inferiormente, se possuir uma cota inferior (em X).*
- *Seja $A \subset X$ limitado superiormente. Dizemos que $S \in X$ é o supremo de A (se existir) se S for a menor das cotas superiores de A.*
- *Seja $A \subset X$ limitado inferiormente. Dizemos que $s \in X$ é o ínfimo de A (se existir) se s for a maior das cotas inferiores de A.*
- *Dizemos que $(X, \leq)$ é completo se todo $A \subset X$ limitado superiormente possuir supremo e todo $B \subset X$ limitado inferiormente possuir ínfimo.*

Finalmente, a caracterização para os reais:

Teorema 14

Todo espaço totalmente ordenado, com ordem densa, sem maior nem menor elementos, completo e separável é homeomorfo a $\mathbb{R}$.

Demonstração. Seja $(X, \leq)$ como no enunciado. Seja $D \subset X$ denso e enumerável. Vamos mostrar que D satisfaz as hipóteses do teorema anterior (Teorema 12).

Suponha por contradição que D possua maior elemento m. Note que $(m, +\infty)$ é um aberto não vazio em X (pois X não possui maior elemento). Mas $(m, +\infty) \cap D = \emptyset$, contrariando a densidade de D. Analogamente, D não tem menor elemento.

Suponha que a ordem de D não seja densa. Então, existem $d_1, d_2 \in D$ tais que $d_1 < d_2$ e $(d_1, d_2) \cap D = \emptyset$. Mas, como a ordem em X é densa, $(d_1, d_2) \neq \emptyset$, o que é, novamente, uma contradição com o fato de D ser denso em X.

Desta forma, podemos tomar $f : D \to \mathbb{Q}$ o isomorfismo dado pelo teorema anterior. Vamos estender f para X da seguinte forma:

$$\tilde{f}(x) = \sup\{f(d) : d \in D, d \leq x\}.$$

Note que, pela densidade de D, $\tilde{f}$ preserva a ordem. Pela completude de X, temos que $\tilde{f}$ é bijetora (veja o Exercício 4 abaixo).

Corolário 15

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. Então, (a, b) é homeomorfo a $\mathbb{R}$, assim como $(a, +\infty)$ e $(-\infty, b)$.

Exercícios - Homeomorfismos

1. Mostre que composição de homeomorfismos é um homeomorfismo.
2. Mostre que "ser uma sequência convergente" é um invariante topológico.
3. Seja $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ com a topologia induzida por $\mathbb{R}$. Mostre que tal espaço e o espaço da sequência convergente (Exemplo 3 da Aula 6) são homeomorfos.
4. Mostre que a função $\tilde{f}$ construída na demonstração do Teorema 14 é bijetora.
5. Se X e Y são conjuntos totalmente ordenados e com a topologia da ordem, mostre que se $f : X \to Y$ é um isomorfismo de ordem, então f é um homeomorfismo (quando X e Y são considerados com as topologias da ordem).

Exercícios - Homeomorfismos

6. Mostre que todo espaço totalmente ordenado com uma topologia da ordem sempre é de Hausdorff.
7. Seja $(X, \leq)$ conjunto totalmente ordenado e com a topologia da ordem. Mostre que se X tem um ponto isolado (x é isolado se $\{x\}$ é aberto) então $\leq$ não é uma ordem densa. Dê um exemplo de que não vale a volta.
8. Mostre que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ são homeomorfos.
9. Dizemos que (X, τ) é um espaço homogêneo se para todo $x, y \in X$, existe $f : X \to X$ homeomorfismo de forma que $f(x) = y$.
   (a) Mostre que $\mathbb{R}$ é homogêneo.
   (b) Mostre que (a, b) é homogêneo.
   (c) Mostre que $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ como no espaço da sequência convergente (Exemplo 3 da Aula 6) não é homogêneo.
10. Dizemos que $f : X \to Y$ é uma função aberta se $f(A)$ é aberto para todo A aberto em X (definimos uma função fechada de maneira análoga). Mostre que, se f é um homeomorfismo, então f é aberta.
11. Seja $f : X \to Y$ uma função contínua, injetora e aberta. Mostre que, se $\mathcal{B}$ é uma base em Y, então $\left\{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\right\}$ é uma base em X.

Exercícios - Homeomorfismos

12. Considere o conjunto $X = [0,1) \cup [2,3)$.
    (a) Considerando X como subespaço de $\mathbb{R}$, note que $2 \notin \overline{[0,1)}$.
    (b) Considerando X com a topologia da ordem (usando a sua ordem usual), note que $2 \in \overline{[0,1)}$.
    (c) Conclua que "descer para subespaço" e "tomar a topologia da ordem induzida" não comutam.
13. Mostre que vale o seguinte enunciado alternativo para o Teorema Tietze: Sejam(X, τ) espaço T_4 e $I \subset \mathbb{R}$ intervalo. Sejam $F \subset X$ fechado e $f : F \to I$ função contínua. Então existe $\tilde{f} : X \to I$ extensão contínua de f.

Vamos apresentar algumas construções comuns com espaços topológicos - pense nisso como uma maneira de criar novos espaços a partir de antigos.

Produto

Nesta seção, vamos apresentar como fazer o produto entre espaços topológicos. Vamos começar com o produto finito e provar algumas propriedades básicas. Depois, quando fizermos o produto geral, veremos que esses resultados são casos particulares. Mas optamos por esta ordem por questões didáticas.

Definição 16

Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos. Definimos a topologia produto sobre $X \times Y$ como a topologia gerada pelos conjuntos da forma $A \times B$, onde $A \in \tau$ e $B \in \sigma$.

Note que se $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ são bases para (X, τ) e (Y, σ) respectivamente, então $\mathcal{B} = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}$ é base para $X \times Y$ (veja exercício abaixo)

Proposição 17

Se $(X, \tau)e(Y, \sigma)$ são espaços de Hausdorff, então $X \times Y$ também é.

Demonstração. Sejam $(a, b), (x, y) \in X \times Y$ distintos. Suponha, sem perda de generalidade, $x \neq a$. Então, existem $U, V \in \tau$ disjuntos tais que $x \in U$ e $a \in V$. Note que $(x, y) \in U \times Y, (a, b) \in V \times Y$ e tanto $U \times Y$, quanto $V \times Y$, são abertos disjuntos.

Proposição 18

Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos, sendo (Y, σ) espaço de Hausdorff e $f : X \to Y$ uma função contínua. Então, o gráfico de f, $G = \{(x, f(x)) : x \in X\})$ é fechado em $X \times Y$.

Demonstração. Seja $(x, y) \notin G$. Precisamos encontrar uma vizinhança aberta de (x, y) que não intercepte G. Como $(x, y) \notin G, y \neq f(x)$. Sejam $A, B \in \sigma$ disjuntos tais que $y \in A$ e $f(x) \in B$. Como f é contínua, seja V aberto de X tal que $x \in V$ e $f(V) \subset B$. Note que $(x, y) \in V \times A$ e $(V \times A) \cap G = \emptyset$. De fato, se $z \in V$, então $f(z) \in B$. Portanto, $f(z) \notin A$ e $(z, f(z)) \notin V \times A$.

Produto

Considere a função $\pi_X : X \times Y \to X$ dada por $\pi_X(x, y) = x$. Note que π_X é contínua $\left(\pi_X^{-1}(A) = A \times Y\right)$. Esta função é chamada de função projeção em X.

De forma análoga, definimos π_Y.

Note que, na verdade, $\{\pi_X^{-1}(V) : V \text{ é aberto em } X\} \cup \{\pi_Y^{-1}(W) : W \text{ é aberto em } Y\}$ geram a topologia em $X \times Y$.

E essa é a menor coleção possível de forma que as projeções sejam contínuas - se um destes conjuntos não fosse aberto, seria uma testemunha para o fato da respectiva projeção não ser contínua.

Isso nos motiva a definir a topologia produto no caso geral: faremos a "menor" topologia que faz com que as projeções sejam contínuas.

Definir uma topologia assim, querendo que uma determinada família de funções seja contínua não é tão incomum, então vamos aproveitar para já definir esse caso geral. (Topologias fraca e fraca* de Análise Funcional).

Definição 19

Seja $\mathcal{F}$ uma família de funções da forma $f_\alpha : X \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, em que X é um conjunto e cada (Y_α, τ_α) é um espaço topológico. Chamamos de topologia (fraca) induzida por $\mathcal{F}$ a topologia sobre X gerada pelos conjuntos da forma $f_\alpha^{-1}(V)$, onde $\alpha \in A$ e $V \in \tau_\alpha$.

Note que, desta forma, cada f_α é contínua para todo $\alpha \in A$(veja exercícios abaixo).

Agora temos todo o material para definir o produto no caso geral.

Definição 20

Seja $((X_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in A}$ *uma família de espaços topológicos. Defina o produto dos* $((X_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in A}$ *como*

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \left\{ (x_\alpha)_{\alpha \in A} : x_\alpha \in X_\alpha \right\}$$

com a topologia fraca induzida pelas funções $(\pi_\alpha)_{\alpha \in A}$ *onde cada* $\pi_\alpha : \prod_{\beta \in A} X_\beta \to X_\alpha$ *é dada por* $\pi_\alpha \left((x_\beta)_{\beta \in A} \right) = x_\alpha$ *(chamamos* x_α *de* α*-ésima coordenada* $\text{de}\,(x_\alpha)_{\alpha \in A}$*).*
Esta topologia é chamada de topologia produto sobre $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ *(ou topologia de Tychonoff).*

Note que tal topologia é gerada pelos conjuntos da forma $\prod_{\beta \in A} V_\beta$, onde

$$V_\beta = \begin{cases} V & \text{se } \beta = \alpha \\ X_\beta & \text{se } \beta \neq \alpha \end{cases}$$

onde V é um aberto de X_α.

Isso é verdade pois $\pi_\alpha^{-1}(V) = \prod_{\beta \in A} V_\beta$.

Fechando tal família por interseções finitas, temos uma base para a topologia. Ou seja, uma base para tal espaço é formada por conjuntos da forma:

$$\prod_{\alpha \in A} V_\alpha$$

onde $\{\alpha \in A : V_\alpha \neq X_\alpha\}$ é finito e cada V_α é aberto em X_α.

Chamaremos tais abertos de abertos básicos do produto.

Neste caso, também se costuma chamar de suporte do aberto o conjunto finito $\{\alpha \in A : V_\alpha \neq X_\alpha\}$.

Produto

Em geral, produto de abertos não é aberto: por exemplo, o produto $A = \prod_{n\in\mathbb{N}}(0, n)$ não é um aberto em $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$.

De fato, o ponto $x = \left(\frac{1}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (isto é, em todas as suas coordenadas são iguais a $\frac{1}{2}$) é um ponto de A. Mas não existe um aberto básico contendo x e contido em A. Para ver isso, suponha que V seja um aberto básico tal que $x \in V \subset A$. Seja n fora do suporte de V. Note que o ponto $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ onde

$$y_k = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ se } k \neq n \\ -1 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

é tal que $y \in V$ mas $y \notin A$.

Apesar de produto de abertos nem sempre ser aberto, o produto de fechados sempre é fechado.

Proposição 21

Se $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ é uma família tal que cada F_α é um fechado em X_α, então $\prod_{\alpha\in A} F_\alpha$ é fechado em $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$.

Demonstração. Seja $x = (x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \setminus \prod_{\alpha\in A} F_\alpha$. Logo, existe $\alpha \in A$ tal que $x_\alpha \notin F_\alpha$. Note que $V = \prod_{\beta\in A} V_\beta$ onde

$$V_\beta = \begin{cases} X_\alpha \setminus F_\alpha & \text{se } \beta = \alpha \\ X_\beta & \text{se } \beta \neq \alpha \end{cases}$$

é um aberto tal que $x \in V$ e $V \cap \prod_{\alpha\in A} F_\alpha = \emptyset$.

Vamos terminar esta seção mostrando como algumas propriedades de separação se comportam no produto.

Proposição 22

Se cada X_α é T_i, então $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ é T_i, para $i \in \{0,1,2,3\}$.

Demonstração. T_0 Exercício.

T_1 Pela proposição anterior e pela caracterização dos unitários serem fechados.

T_2 Sejam $x \neq y$ e $\alpha \in A$ tais que $x_\alpha \neq y_\alpha$. Sejam U e V abertos disjuntos de X_α tais que $x_\alpha \in U$ e $y_\alpha \in V$. Note que $\prod_{\beta\in A} U_\beta$ e $\prod_{\beta\in A} V_\beta$, onde

$$U_\beta = \begin{cases} U & \text{se } \beta = \alpha \\ X_\beta & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$V_\beta = \begin{cases} V & \text{se } \beta = \alpha \\ X_\beta & \text{caso contrário} \end{cases}$$

são abertos que separam x e y.

T_3 Seja $x \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ e seja $\prod_{\alpha \in A} V_\alpha$ aberto básico (i.e., cada V_α é aberto em X_α e $\{\alpha \in A : V_\alpha \neq X_\alpha\}$ é finito). Para cada α tal que $V_\alpha \neq X_\alpha$ seja W_α aberto em X_α tal que $x_\alpha \in W_\alpha \subset \overline{W_\alpha} \subset V_\alpha$ (usando T_3). Note que $\prod_{\alpha \in A} W_\alpha^*$ é uma vizinhança fechada de x onde

$$W_\alpha^* = \begin{cases} \overline{W_\alpha}, & V_\alpha \neq X_\alpha \\ X_\alpha, & V_\alpha = X_\alpha \end{cases}$$

Note, também, que $\prod_{\alpha \in A} W_\alpha^* \subset \prod_{\alpha \in A} V_\alpha$.

Exercícios - Produtos

1. Sejam $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ espaços topológicos e sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases para eles respectivamente. Mostre que $\mathcal{B} = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}$ é uma base para $X_1 \times X_2$.
2. Mostre que um espaço (X, τ) é de Hausdorff se, e somente se, $D = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ é fechado em $X \times X$.
3. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos não vazios. Seja $y \in Y$.
   (a) Mostre que (X, τ) é homeomorfo a $X \times \{y\}$
   (b) Se (Y, σ) é T_1, mostre que $X \times \{y\}$ é fechado (em $X \times Y$).
4. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Note que o gráfico de f é fechado em $\mathbb{R}^2$ mas que f não é contínua.

Exercícios - Produtos

5. Seja $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ família de funções da forma $f_\alpha : X \to X_\alpha$. Mostre que a topologia fraca em X induzida por tal família é a menor topologia sobre X tal que cada f_α é contínua.
6. Seja $((X_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha\in A}$ família de espaços topológicos. Para cada $\alpha \in A$, seja $B_\alpha \subset X_\alpha$. Mostre que $\overline{\prod_{\alpha\in A} B_\alpha} = \prod_{\alpha\in A} \overline{B_\alpha}$.
7. Considere $\mathbb{R}$ com a métrica usual.
   (a) Mostre que $d_E : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
   $$d_E\left((x_1, x_2), (y_1, y_2)\right) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$
   é uma métrica sobre $\mathbb{R}^2$ (métrica euclidiana).
   (b) Mostre que $d_T : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
   $$d_T\left((x_1, x_2), (y_1, y_2)\right) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$
   é uma métrica sobre $\mathbb{R}^2$ (métrica do taxista).
   (c) Mostre que $d_M : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
   $$d_M\left((x_1, x_2), (y_1, y_2)\right) = \max\left\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\right\}$$
   é uma métrica sobre $\mathbb{R}^2$ (métrica do máximo).
   (d) Mostre que todas a métricas dos itens anteriores induzem a topologia do produto entre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (e, portanto, são todas equivalentes).

Exercícios - Produtos

7. Dada uma família $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ de espaços topológicos, poderíamos adotar no seu produto a topologia gerada pelos conjuntos da forma

$$\prod_{\alpha \in A} V_\alpha$$

onde cada V_α é aberto em X_α (ou seja, não há aquela restrição sobre os suportes). Essa topologia é conhecida com a topologia da caixa e denotada por $\square_{\alpha \in A} X_\alpha$.

   (a) Em geral, qual topologia tem mais abertos - esta ou a usual?

   (b) Quem é a topologia de $\square_{\alpha \in A} \mathbb{N}$? ($\mathbb{N}$ com a topologia usual)

Exercícios - Produto

Definição 23

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Chamamos uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ de um produto interno se são satisfeitas as seguintes condições, para quaisquer $a, b, c \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

(a) $\langle a + b, c \rangle = \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle$

(b) $\langle \lambda a, b \rangle = \lambda \langle a, b \rangle$

(c) $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$

(d) $\langle a, a \rangle > 0$ *se* $a \neq 0$

8. Mostre que $\langle (a, b), (x, y) \rangle = ax + by$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$. Este é o produto interno usual de $\mathbb{R}^2$.
9. Seja V espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sejam $a, b \in V$.
   (a) Suponha $a \neq 0$. Mostre que $\langle a, b - \lambda a \rangle = 0$, onde $\lambda = \frac{\langle a,b \rangle}{\langle a,a \rangle}$.
   (b) Suponha $a \neq 0$. Mostre que $\langle b, b \rangle = \langle b - \lambda a, b - \lambda a \rangle + \lambda^2 \langle a, a \rangle$, onde λ é o mesmo acima.
   (c) Suponha $a \neq 0$. Mostre que $\langle b, b \rangle \geq \frac{\langle a,b \rangle^2}{\langle a,a \rangle}$.
   (d) Mostre que $\langle a, b \rangle^2 \leq \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle$. Esta é a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Definição 24

Dado um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$, dizemos que uma função $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ é uma norma sobre V se, dados $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

(a) $\|v\| > 0$ *se* $v \neq 0$

(b) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$

(c) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

9. Seja V espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Mostre que a função $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$ é uma norma sobre V. Chamamos tal norma de norma induzida pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$
10. Dada uma $\|\cdot\|$, mostre que $d(x, y) = \|x - y\|$ é uma métrica. Esta é a métrica induzida pela norma $\|\cdot\|$.
11. Mostre que a métrica euclidiana em $\mathbb{R}^2$ é a métrica induzida pela norma induzida pelo produto interno usual de $\mathbb{R}^2$.