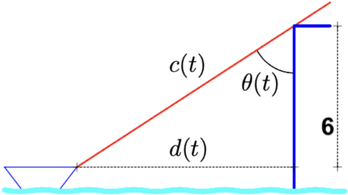
# Revisão para P2
# Aula 24

**Primeiro Semestre de 2023**

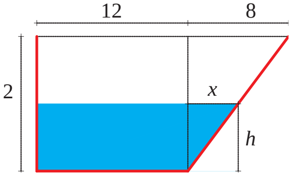
Suponha que um barco seja puxado para o cais por uma corda presa à sua proa, situada 6 m abaixo do apoio da corda no cais, conforme a figura abaixo. Suponha ainda que a corda seja puxada com uma velocidade de 2 m/s. Nesse caso, o comprimento $c(t)$ da corda entre a proa e o apoio, a distância $d(t)$ do barco ao cais e o ângulo $\theta(t)$ entre a corda e a vertical são funções do tempo $t$. Denote por $t_0$ o instante em que $c(t_0) = 10$ m. Encontre as fórmulas para $d(t)$, $\mathrm{tg}(\theta(t))$. Usando estas fórmulas e a regra da cadeia, os valores de $d(t_0)$, $d'(t_0)$, $\mathrm{tg}(\theta(t_0))$ e a taxa de variação de $\theta(t)$ no instante $t_0$ são (lembrar do significado de derivada negativa/positiva):

# Taxas relacionadas

1. $d(t_0) = 8$ m, $d'(t_0) = -\frac{5}{2}$ m/s, $\mathrm{tg}(\theta(t_0)) = \frac{4}{3}$, $\theta'(t_0) = -\frac{3}{20}$ rad/s
2. $d(t_0) = 8$ m, $d'(t_0) = -\frac{10}{3}$ m/s, $\mathrm{tg}(\theta(t_0)) = \frac{4}{3}$, $\theta'(t_0) = -\frac{20}{27}$ rad/s
3. $d(t_0) = 8$ m, $d'(t_0) = -\frac{10}{3}$ m/s, $\mathrm{tg}(\theta(t_0)) = \frac{4}{3}$, $\theta'(t_0) = \frac{20}{27}$ rad/s
4. $d(t_0) = 8$ m, $d'(t_0) = -\frac{5}{2}$ m/s, $\mathrm{tg}(\theta(t_0)) = \frac{3}{4}$, $\theta'(t_0) = \frac{15}{64}$ rad/s
5. nenhuma das outras alternativas está correta

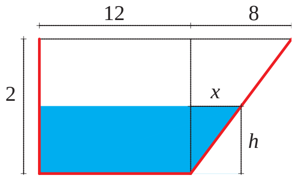


Suponha que um reservatório de água tenha corte vertical na forma de um trapézio com as medidas em metros indicadas na figura abaixo. Suponha ainda que a vista superior do reservatório seja um retângulo de lados medindo 20 m e 10 m.




a) Determine o volume total do reservatório.

Suponha que um reservatório de água tenha corte vertical na forma de um trapézio com as medidas em metros indicadas na figura abaixo. Suponha ainda que a vista superior do reservatório seja um retângulo de lados medindo 20 m e 10 m.




a) Determine o volume total do reservatório.

**Solução**: o reservatório pode ser visto como um prisma cuja base é o trapézio ilustrado na figura ao lado. Nesse caso, a área da base é $A_b = \dfrac{20+12}{2} \times 2$ e a altura é $H = 10$. Daí segue-se que o volume $V$ do reservatório é igual a

$$V = A_b \times H = (20+12) \times 10 = 320 \text{ m}^3.$$

b) Obtenha uma equação que relaciona as medidas $x$ e $h$ indicadas na figura.

b) Obtenha uma equação que relaciona as medidas $x$ e $h$ indicadas na figura.

**Solução**: usando semelhança de triângulos, obtém-se

$$\frac{x}{8} = \frac{h}{2},$$

de onde segue-se que $\boxed{x = 4\,h}$.

c) Obtenha o volume $V$ de água no reservatório em função da altura $h$.

c) Obtenha o volume $V$ de água no reservatório em função da altura $h$.

**Solução**: usando que $x = 4\,h$ e o mesmo raciocínio do item a), obtém-se que o volume $V = V(h)$ é dado por

$$V(h) = \frac{((12 + 4\,h) + 12)}{2} \times h \times 10 = 20h^2 + 120h.$$

d) Supondo que o reservatório esteja sendo abastecido com água a um fluxo de 50 L/min, segue que a altura $h$ é uma função do tempo $h(t)$. Supondo ainda que $h(0) = 0$, determine a taxa de variação de $h(t)$ no instante $t_0$ em que $h(t_0) = 1$.

d) Supondo que o reservatório esteja sendo abastecido com água a um fluxo de 50 L/min, segue que a altura $h$ é uma função do tempo $h(t)$. Supondo ainda que $h(0) = 0$, determine a taxa de variação de $h(t)$ no instante $t_0$ em que $h(t_0) = 1$.

**Solução**: nas condições do item, também o volume $V$ é uma função do tempo $V(t) = 20(h(t))^2 + 120h(t)$ m$^3$ com derivada igual a $V'(t) = 40\,h(t)\,h'(t) + 120\,h'(t)$ m$^3$/min.

d) Supondo que o reservatório esteja sendo abastecido com água a um fluxo de 50 L/min, segue que a altura $h$ é uma função do tempo $h(t)$. Supondo ainda que $h(0) = 0$, determine a taxa de variação de $h(t)$ no instante $t_0$ em que $h(t_0) = 1$.

**Solução**: nas condições do item, também o volume $V$ é uma função do tempo $V(t) = 20(h(t))^2 + 120h(t)$ m$^3$ com derivada igual a $V'(t) = 40\,h(t)\,h'(t) + 120\,h'(t)$ m$^3$/min.

Por outro lado, como o reservatório está sendo abastecido com água a um fluxo de 50 L/min $= 0.05$ m$^3$/min, segue-se que $V'(t) = 0.05$, e portanto $0.05 = 40\,h(t)\,h'(t) + 120\,h'(t)$.

d) Supondo que o reservatório esteja sendo abastecido com água a um fluxo de 50 L/min, segue que a altura $h$ é uma função do tempo $h(t)$. Supondo ainda que $h(0) = 0$, determine a taxa de variação de $h(t)$ no instante $t_0$ em que $h(t_0) = 1$.

**Solução**: nas condições do item, também o volume $V$ é uma função do tempo $V(t) = 20(h(t))^2 + 120h(t)$ m$^3$ com derivada igual a $V'(t) = 40\,h(t)\,h'(t) + 120\,h'(t)$ m$^3$/min.

Por outro lado, como o reservatório está sendo abastecido com água a um fluxo de 50 L/min $= 0.05$ m$^3$/min, segue-se que $V'(t) = 0.05$, e portanto $0.05 = 40\,h(t)\,h'(t) + 120\,h'(t)$.

Em particular, no instante $t_0$ em que $h(t_0) = 1$, obtém-se que

$$h'(t_0) = \frac{0.05}{40\,h(t_0) + 120} = \frac{0.05}{160} \quad \frac{\text{m}}{\text{min}}.$$

**5)** O objetivo desse exercício é usar as propriedades da função exponencial $e^x$ para investigar as propriedades das funções *cosseno e seno hiperbólicos* dadas por

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{senh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

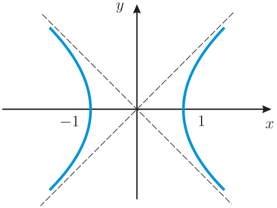
Lembrando que $e^{x+y} = e^x e^y$, onde $e$ é a base Neperiana, resolva os itens abaixo.

(a) Mostre que

$$\cosh^2(t) - \operatorname{senh}^2(t) = 1.$$

Fazendo $x = \cosh(t)$ e $y = \operatorname{senh}(t)$, isso mostra que o ponto $(x, y)$ está sobre a hipérbole unitária dada por

$$x^2 - y^2 = 1.$$




(b) Verifique a fórmula do cosseno hiperbólico da soma

$$\cosh(s + t) = \cosh(s)\cosh(t) + \operatorname{senh}(s)\operatorname{senh}(t).$$

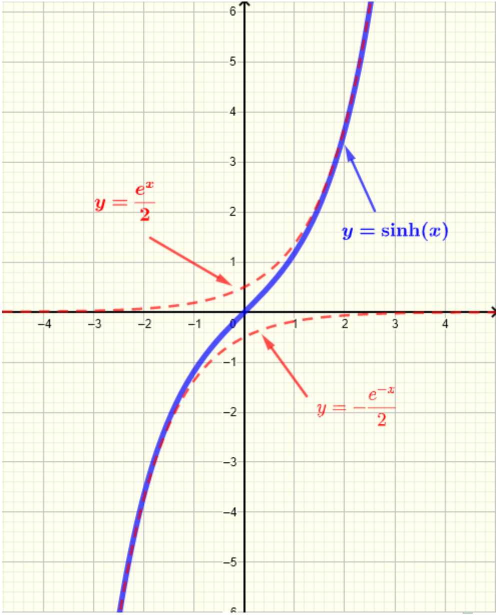
(c) Verifique a fórmula do seno hiperbólico da soma

$$\operatorname{senh}(s + t) = \operatorname{senh}(s)\cosh(t) + \operatorname{senh}(t)\cosh(s).$$

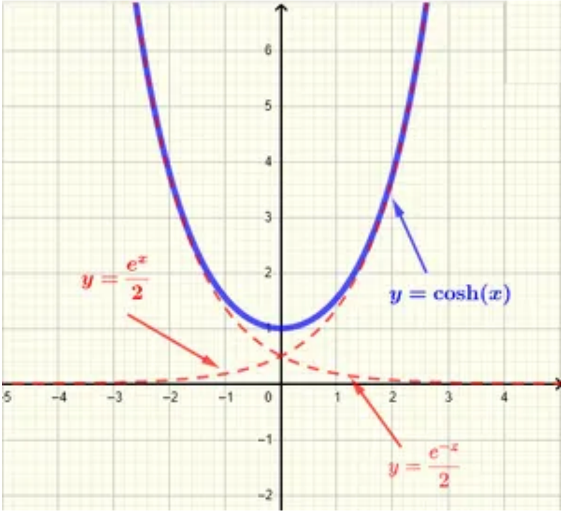
(d) Verifique que $\cosh(t)$ é uma função par enquanto $\operatorname{senh}(t)$ é uma função ímpar.

(e) Prove que não existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{senh}(t) = \cosh(t)$.

# Funções Hiperbólicas



# Funções Hiperbólicas



**Questão 5** Suponha que $f''$ contínua em $\mathbb{R}$ e tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) + xf'(x) = 1.$$

Considere as seguintes afirmações:

(i) $f$ não admite máximo local.

(ii) Se $f$ admitir um ponto crítico $x_0$, então $x_0$ será ponto de mínimo local.

(iii) $f$ poderá admitir no máximo um ponto crítico.

(iv) $\exists\, r > 0$ tal que $f$ tem concavidade para cima em $(-r, r)$.

Sobre as afirmações anteriores é correto dizer que:

(a) Todas são corretas

(b) Somente (iii) é falsa

(c) Somente (i) e (ii) são verdadeiras

(d) Todas são falsas

(e) Somente (iv) é verdadeira

# Problema de otimização

**Questão 7** *Um contêiner para estocagem deve ter a forma de um paralelepípedo, ser aberto na parte de cima e ter um volume de 15* $m^3$*. O comprimento de sua base é o dobro da largura. O material para a base custa R$ 45 por metro quadrado. O material para os lados custa R$ 32 por metro quadrado. O mais barato desses contêineres tem as seguintes medidas:*

*(a)* $\left\{1, 2, \frac{15}{2}\right\}$

*(b)* $\left\{2, 4, \frac{15}{8}\right\}$

*(c)* $\left\{3, 6, \frac{15}{18}\right\}$

*(d)* $\left\{\frac{1}{2}, 1, 30\right\}$

*(e) nenhuma das demais alternativas*

Use a fórmula de Taylor com resto de Lagrange para mostrar que

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \leq \sqrt{x+1} \leq 1+\frac{x}{2} \quad \text{para todo} \quad x>0.$$

**Dica:** Use os polinômios de Taylor de ordens 1 e 2 e analise o sinal dos respectivos restos de Lagrange.

Considere a função $f(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x)$.

a) Verifique que $f''(x) = -4f(x)$, $f^{(iv)}(x) = 16f(x)$, $f^{(vi)}(x) = -64f(x)$ (isto simplificará suas contas).

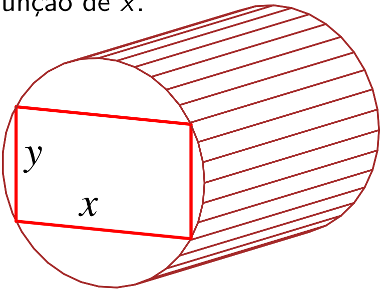
b) Encontre $P$, o polinômio de Taylor de ordem 5 da função $f$ em torno de $x = 0$.

c) Estime o erro cometido, em valor absoluto, na aproximação de $f(x) \approx P(x)$ para $x \in [-\pi/32, \pi/32]$.

**Dica:** Lembre-se que $|\operatorname{sen}(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{R}$ e que $\pi/32 < 10^{-1}$.

# Método do Intervalo Fechado

Suponha que uma viga retangular, de largura $x$ e altura $y$, deva ser cortada de um cilindro de seção circular de **raio a**, como ilustra a figura abaixo. A resistência R dessa viga é diretamente proporcional ao produto de sua largura $x$ pelo quadrado de sua altura $y$. Indique por $K$ a constante de proporcionalidade e observe que a altura $y = y(x)$ pode ser obtida a partir da largura $x$, e portanto a resistência $R = R(x)$ pode ser expressa apenas em função de $x$.



a) Determine a expressão de $y = y(x)$ em termos de $x$.
b) Obtenha a expressão da resistência $R = R(x)$ como função de $x$.
c) Determine o ponto crítico de $R(x)$ no domínio $(0, 2a)$.

d) Determine as dimensões $x$ e $y$ da viga mais resistente (justifique sua resposta).

# Regra da Cadeia

Calcule $f'(x)$ para $f(x) = \mathrm{sen}(\sqrt{x^6 + 1}) + \dfrac{\mathrm{tg}(x^3)}{e^x + \sec(x)}$