Aula 18: Conexos

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

1^o **Semestre de 2023 - Curso de Topologia**

Vamos apresentar agora outro importante invariante topológico.

Definição 1

Seja (X, τ) espaço topológico. Dizemos que X é conexo se, dados quaisquer abertos A e B de X disjuntos tais que $A \cup B = X$, temos que $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

Os intervalos são exatamente os subconjuntos conexos na reta real.

Proposição 2

$A \subset \mathbb{R}$ é conexo se, e somente se, A é um intervalo.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponha que A não seja um intervalo. Então existem $a, b \in A$ e $x \in \mathbb{R}$ tais que $a < x < b$ e $x \notin A$. Então

$$A = \big((-\infty, x) \cap A\big) \cup \big((x, +\infty) \cap A\big),$$

que são abertos disjuntos não vazios de A e, portanto, A não é conexo.
$(\Leftarrow)$ Seja agora A um intervalo. Suponha que A não seja conexo. Então existem V, W abertos em A, disjuntos, tais que $A = V \cup W$. Sejam $v \in V$ e $w \in W$. Sem perda de generalidade, vamos supor $v < w$.
Considere

$$\alpha = \sup\{x \in V : [v, x] \subset V\}.$$

Note que tal definição faz sentido pois $v \in \{x \in V : [v, x] \subset V\}$ e tal conjunto é limitado superiormente por w.

Note que $\alpha \notin V$ pois, se $\alpha \in V$ (então $\alpha < w$), existiria $\varepsilon > 0$ tal que $[\alpha, \alpha + \varepsilon) \subset V$ e, portanto, $\left[v, \alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right] \subset V$, contrariando a definição de α.

Logo $\alpha \notin V$, o que implica $\alpha \in W$ (pois $A = V \cup W$). Como W é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $(\alpha - \delta, \alpha] \subset W$. Assim, $\alpha - \frac{\delta}{2} \in W$, contrariando a definição de α.

Já na topologia da reta de Sorgenfrey, os intervalos não são conexos.

Exemplo 3

A reta de Sorgenfrey não é conexa.

Basta notar que

$$(-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R}$$

e $(-\infty, 0)$ e $[0, +\infty)$ são abertos disjuntos não vazios da reta de Sorgenfrey.

Conexidade é uma propriedade preservada por funções contínuas.

Proposição 4

Sejam $(X, \tau), (Y, \sigma)$ *espaços topológicos e* $f : X \to Y$ *contínua e sobrejetora. Se* X *é conexo, então* Y *é conexo.*

Demonstração. Sejam $A, B \subset Y$ abertos disjuntos tais que $Y = A \cup B$. Note que $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ e $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$. Se A e B forem ambos não vazios, então $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ seriam abertos não vazios (pois f é sobrejetora), implicando em X não ser conexo.

Com isso, podemos provar facilmente um importante resultado de Cálculo.

Corolário 5 (Teorema do Valor Intermediário)

Sejam (X, τ) *um espaço topológico conexo e* $f : X \to \mathbb{R}$ *contínua. Sejam* $f(a) < f(b)$, *para* $a, b \in X$. *Se* $y \in \mathbb{R}$ *é tal que* $f(a) < y < f(b)$, *então existe* $x \in X$ *tal que* $f(x) = y$

Demonstração. Basta notar que o resultado anterior implica que $f(X)$ é conexo em $\mathbb{R}$ e lembrar que os conexos em $\mathbb{R}$ são os intervalos.

Também obtemos facilmente um resultado sobre a cardinalidade dos conexos completamente regulares.

Corolário 6

Seja (X, τ) espaço topológico completamente regular, conexo e com mais de um ponto. Então $|X| \geq |\mathbb{R}|$.

Demonstração. Sejam $x, y \in X$ distintos. Por X ser completamente regular, existe $f : X \to [0, 1]$ contínua tal que $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$. Como X é conexo, $f(X)$ é um intervalo em $\mathbb{R}$ e $1, 0 \in f(X)$. Logo $f(X) = [0, 1]$.

Um outro jeito de caracterizar conjuntos conexos é em termos de conjuntos mutuamente separados.

Definição 7

Seja (X, τ) espaço topológico. Dizemos que $A, B \subset X$ são mutuamente separados se $\bar{A} \cap B = \emptyset$ e $A \cap \bar{B} = \emptyset$.

Exemplo 8

$(-\infty, 0)$ *e* $(0, +\infty)$ *são mutuamente separados em* $\mathbb{R}$.

Proposição 9

Sejam (X, τ) *espaço topológico e* $A, B \subset X$ *mutuamente separados tais que* $A \cup B = X$. *Então* $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$.

Demonstração. Observe que

$$x \in (\bar{A} \cap \bar{B}) \subset X = A \cup B \Rightarrow x \in \bar{A} \cap B \quad \text{ou} \quad x \in A \cap \bar{B}.$$

Mas $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$.

Proposição 10

Seja (X, τ) espaço topológico. Então $Y \subset X$ é conexo se, e somente se, não existem $A, B \neq \emptyset$ mutuamente separados (em Y) tais que $Y = A \cup B$.

Frequentemente aplicamos esta proposição para o caso $Y = X$.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponha que existam $A, B \subset X$ não vazios e mutuamente separados (em Y) tais que $Y = A \cup B$. Vamos mostrar que Y não é conexo.

Vamos trabalhar dentro de Y (ou seja, a menos de indicado, todos os fechos e outros termos são pensados como no subespaço Y). Considere $U = Y \backslash \bar{A}$, $V = Y \backslash \bar{B}$.

$U \cap V = \emptyset$

De fato, por De Morgan:

$$U \cap V = Y \backslash (\bar{A} \cup \bar{B}) \subset Y \backslash (A \cup B) = \emptyset.$$

$U \neq \emptyset$

Suponha $U = \emptyset$. Como $U = Y \backslash \bar{A}$, temos que $Y = \bar{A}$. Como A é mutuamente separado de $B = B \cap Y = B \cap \bar{A} = \emptyset$, contradição.

$V \neq \emptyset$

Análogo ao caso anterior.

Assim, pela Proposição 9,

$$U \cup V = Y \backslash \bar{A} \cup Y \backslash \bar{B} = Y \backslash (\bar{A} \cap \bar{B}) = Y,$$

com U, V abertos disjuntos não vazios. Isto é, Y não é conexo.

($\Leftarrow$) Por outro lado, suponha Y não conexo. Novamente, trabalhando dentro do subespaço Y, existem $U, V \subset Y$ abertos não vazios, disjuntos, tais que $U \cup V = Y$. Vamos mostrar que $\bar{U} \cap V = U \cap \bar{V} = \emptyset$.

Sem perda de generalidade, suponha que $x \in \bar{U} \cap V$. Como $x \in V, x \in Y$. Logo, deveríamos ter (definição de fecho) $U \cap V \neq \emptyset$, contradição.

Aula 18 terminou aqui!

Com isso, podemos mostrar que um conjunto conexo não pode ser dividido em dois subconjuntos mutuamente separados.

Corolário 11

Sejam (X, τ) um espaço topológico e $Y \subset X$ conexo. Se $A, B \subset X$ são mutuamente separados e $Y \subset A \cup B$, então $Y \subset A$ ou $Y \subset B$.

Demonstração. Como $Y = (Y \cap A) \cup (Y \cap B)$, basta mostrarmos que $Y \cap A$ e $Y \cap B$ são mutuamente separados (aqui o fecho é no espaço todo) em X, consequentemente em Y. Então, pela Proposição 10, podemos concluir que $Y \cap A = \emptyset$ (portanto $Y \subset B$) ou $Y \cap B = \emptyset$ (portanto $Y \subset A$).

Suponha que exista $x \in \overline{Y \cap A} \cap (Y \cap B)$. Então $x \in B$ e $x \in \overline{Y \cap A} \subset \bar{A}$. Logo, $x \in \bar{A} \cap B$, contradição.

Da mesma forma podemos mostrar que $(Y \cap A) \cap \overline{Y \cap B} = \emptyset$.

Veremos alguns resultados que implicam na conexidade de alguns subconjuntos.

Proposição 12

Seja (X, τ) espaço topológico.

(a) *Se $X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$, onde cada X_α é conexo e $X_\alpha \cap X_\beta \neq \emptyset$ para quaisquer $\alpha, \beta \in I$ distintos, então X é conexo.*

(b) *Se para quaisquer $x, y \in X$ existir $A \subset X$ conexo tal que $x, y \in A$, então X é conexo.*

Demonstração. (a) Suponha que X não seja conexo. Então, pela Proposição 10, sejam $A, B \subset X$ mutuamente separados não vazios tais que $A \cup B = X$. Note que, pelo Corolário 11, para cada $\alpha \in I, X_\alpha \subset A$ ou $X_\alpha \subset B$. Suponha que existam $\alpha, \beta \in I$ tais que $X_\alpha \subset A$ e $X_\beta \subset B$. Como $X_\alpha \cap X_\beta \neq \emptyset$ e $A \cap B = \emptyset$, temos uma contradição. Sem perda de generalidade, podemos supor que $X_\alpha \subset A$, para todo $\alpha \in I$. Logo $X \subset A$ e daí $B = B \cap X = B \cap A = \emptyset$, contradição.

(b) Fixe $x \in X$. Para cada $y \in X$, seja A_y conexo tal que $x, y \in A_y$. Por (a), concluímos que $X = \bigcup_{y \in X} A_y$ é conexo.

Proposição 13

Sejam (X,τ) um espaço topológico e $A \subset X$ conexo. Então para todo $B \subset X$ tal que $A \subset B \subset \bar{A}$ (este fecho em X), temos B conexo.

Demonstração. Suponha que não. Sejam U e V mutuamente separados (em B) não vazios tais que $B = U \cup V$. Note que $A \subset U \cup V$, então, por A ser conexo, temos $A \subset U$ ou $A \subset V$, pelo Corolário 11.

Suponha, sem perda de generalidade, que $A \subset U$. Então, tomando o fecho em B, $B = \bar{A} \subset \bar{U}$. Logo

$$V = (V \cap B) \subset (V \cap \bar{U}) = \emptyset,$$

contradição.

Exercícios - Conexos

1. Mostre que "ser conex'o' é um invariante topológico.
2. Mostre que (X, τ) é conexo se, e somente se, os únicos subconjuntos de X que são abertos e fechados ao mesmo tempo são $\emptyset$ e o próprio X.
3. Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ família de conjuntos conexos tais que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$. Mostre que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ é conexo.
4. Mostre que se um espaço tem um subespaço denso conexo, então o espaço todo é conexo.
5. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A, B \subset X$ conexos e não mutuamente separados. Mostre que $A \cup B$ é conexo.
6. Este exercício é um roteiro para mostrar que produto finito de conexos é conexo.
   (a) Sejam $(X, \tau), (Y, \sigma)$ conexos. Mostre que $X \times \{y\}$ é conexo para qualquer $y \in Y$. Use essa ideia e a Proposição 12 para mostrar que $X \times Y$ é conexo.
   (b) Conclua que produto finito de conexos é conexo.

7. Este exercício é um roteiro para mostrar que produto qualquer de conexos é conexo (usa o anterior). Seja $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ família de espaços conexos. Seja $(a_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.
   (a) Seja $F \subset A$ finito. Mostre que $D_F : \{(b_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha : b_\alpha = a_\alpha$ se $\alpha \notin F\}$ é homeomorfo a $\prod_{\alpha \in F} X_\alpha$ (e, portanto, é conexo pelo exercício anterior).
   (b) Seja $\mathcal{F} = \{F \subset A : F$ é finito $\}$. Mostre que $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} D_F$ é denso em $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$
   (c) Mostre que $(a_\alpha)_{\alpha \in A} \in D_F$ para todo $F \in \mathcal{F}$.
   (d) Mostre que $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} D_F$ é conexo.
   (e) Mostre que $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ é conexo.
8. Mostre que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ é conexo.
9. Se você achou o último exercício interessante, tente provar que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus E$, onde E é enumerável, é conexo. Provavelmente você vai precisar de um argumento (simples) de cardinalidade.