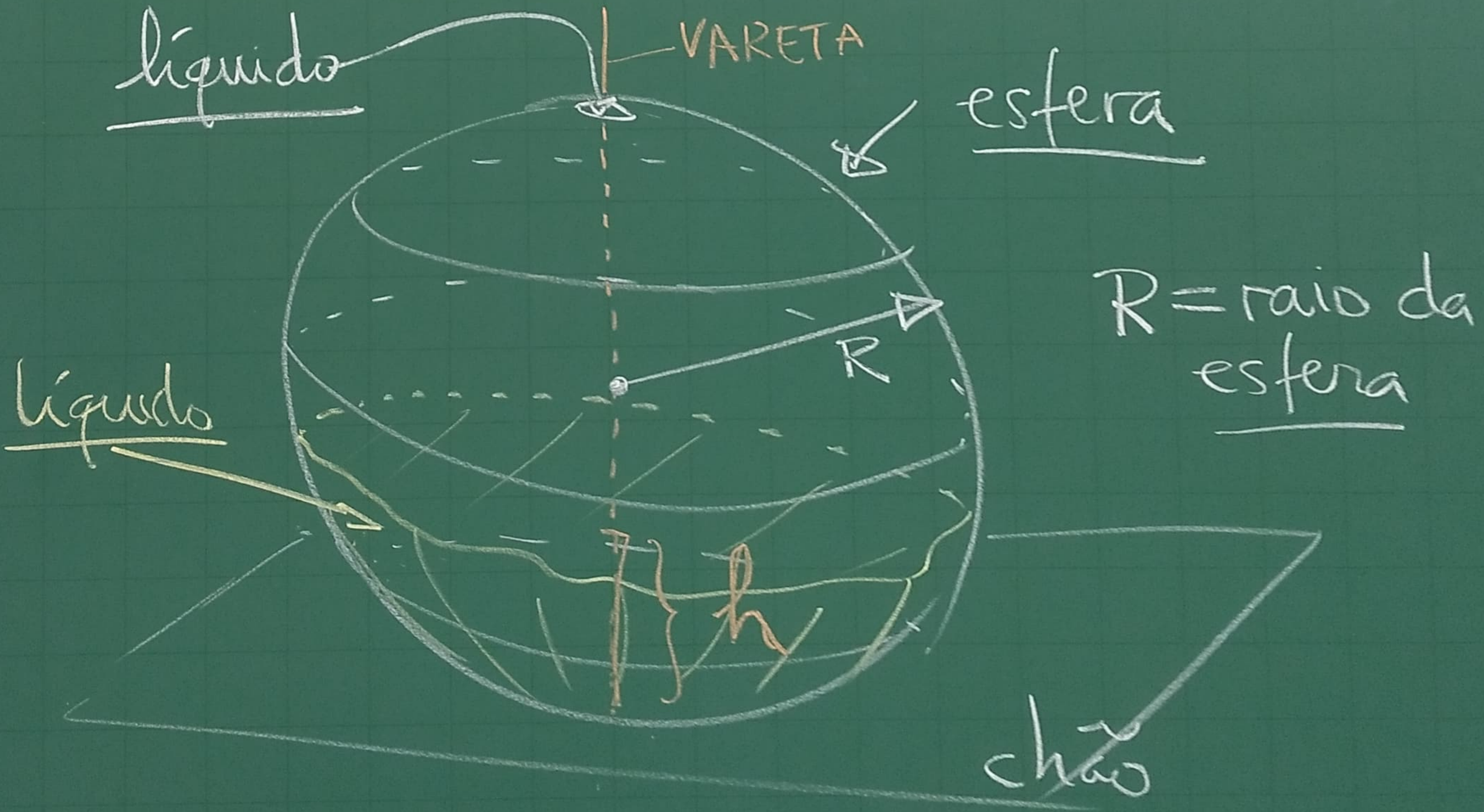
TEMA: EQUAÇÕES / ZEROS DE FUNÇÕES

└→ MÉTODO DE NEWTON

└→ APLICAÇÕES

└→ "O RESERVATÓRIO ESFÉRICO"



Altura máx. p/ o líquido: $2R$

Volume máx.: $\frac{4}{3}\pi R^3 = V_{MAX}$

Primeira pergunta:

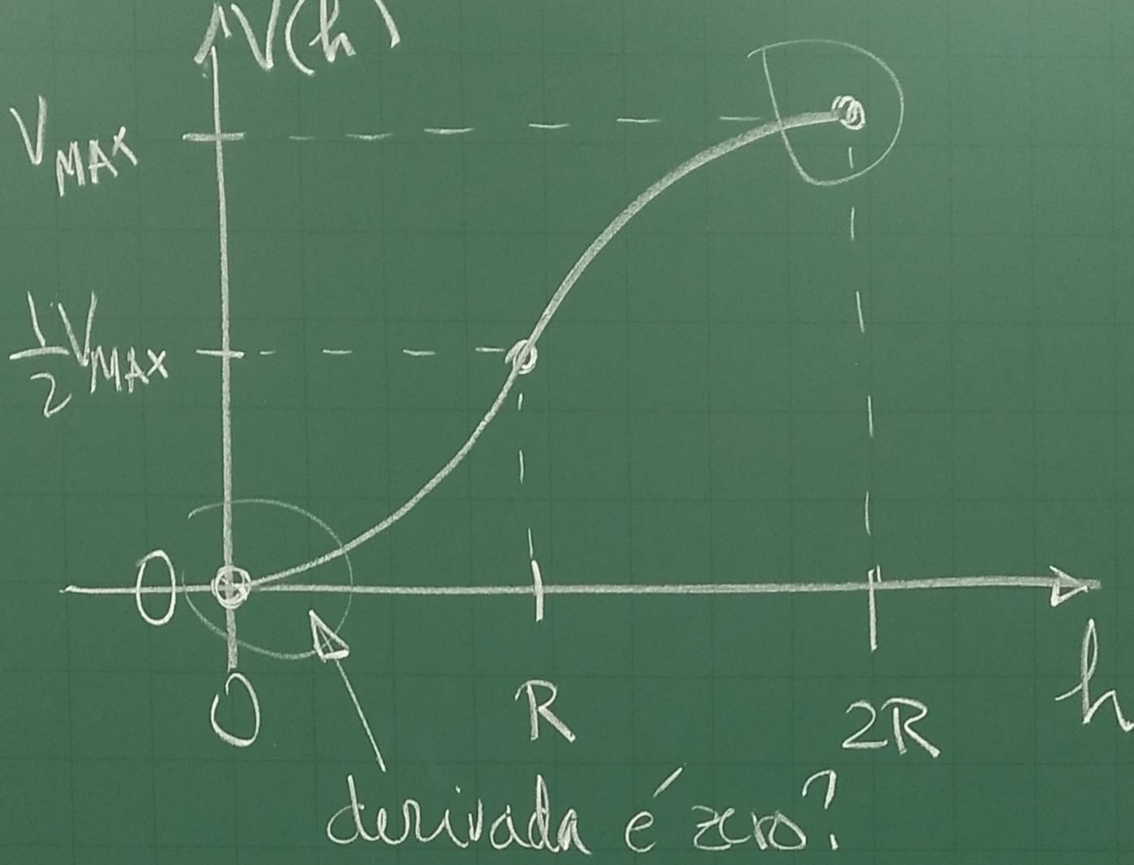
Dada $h \in [0, 2R]$

$$V(h) = ?$$

$h = 0 \longrightarrow V(0) = 0$

$h = 2R \longrightarrow V(2R) = V_{MAX}$

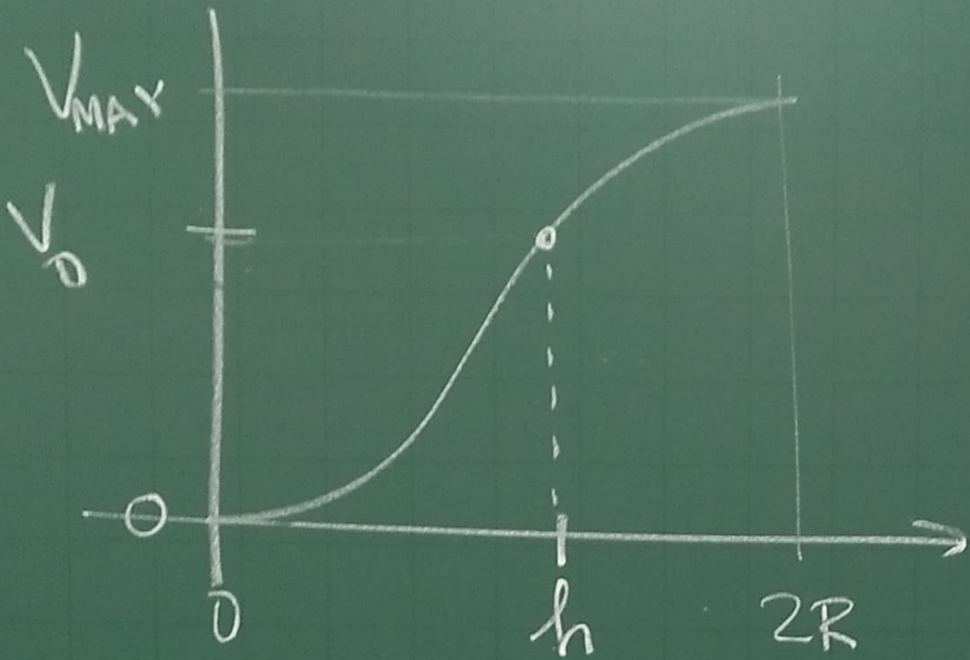
$h = R \longrightarrow V(R) = \frac{1}{2} V_{MAX}$



<u>Segunda pergunta</u>:

Dado um volume V_0 (que pode ser expresso como fração do V_{MAX}), qual é a altura h t.q.

$$V(h) = V_0 \ ?$$



(No fundo, isso é descobrir o valor da função inversa $V^{-1}(V_0)$)

Podemos pensar como equação:

$$V(h) = V_0$$

$$\underbrace{V(h) - V_0}_{f(h)} = 0$$

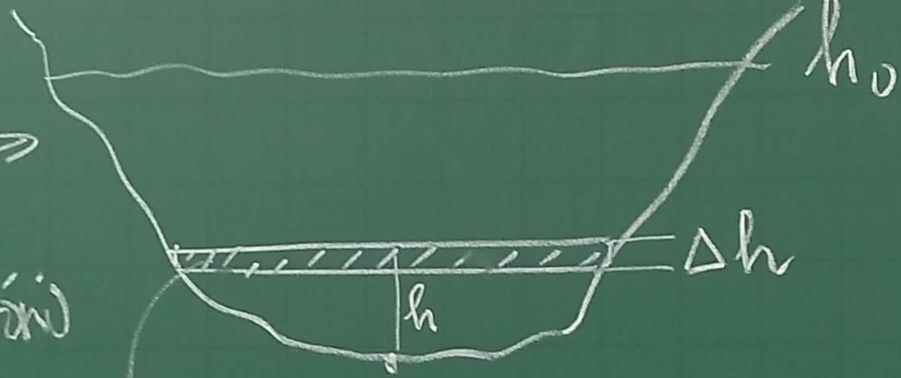
p/ cada V_0

Usar Mét. de Newton.

DESCOBRINDO $V(h)$

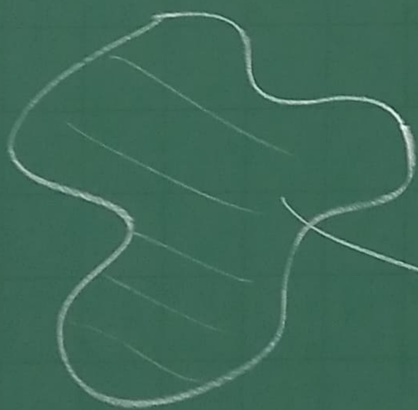
Intuição

corte de um reservatório



Volume da camada de espessura Δh, c/ Δh pequeno

por cima:

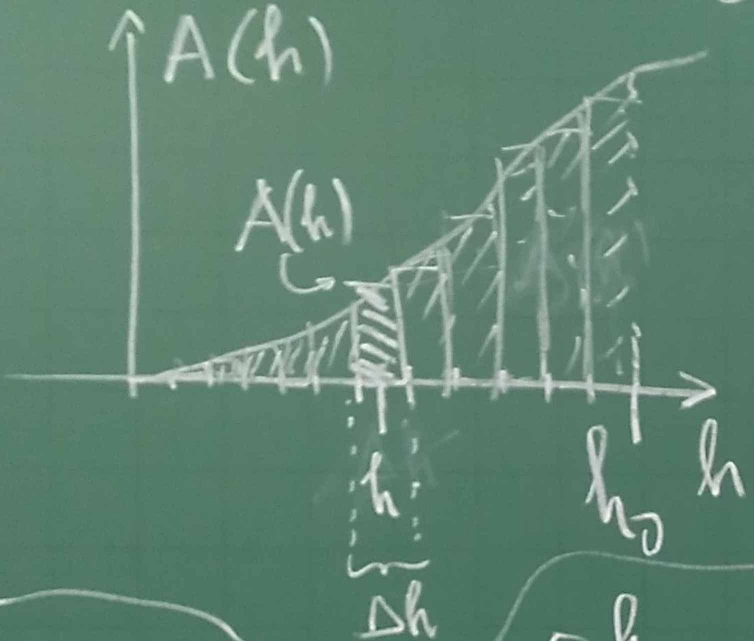


base $\times$ altura $= A(h)\,\Delta h$

área do corte na altura h : $A(h)$

altura : Δh

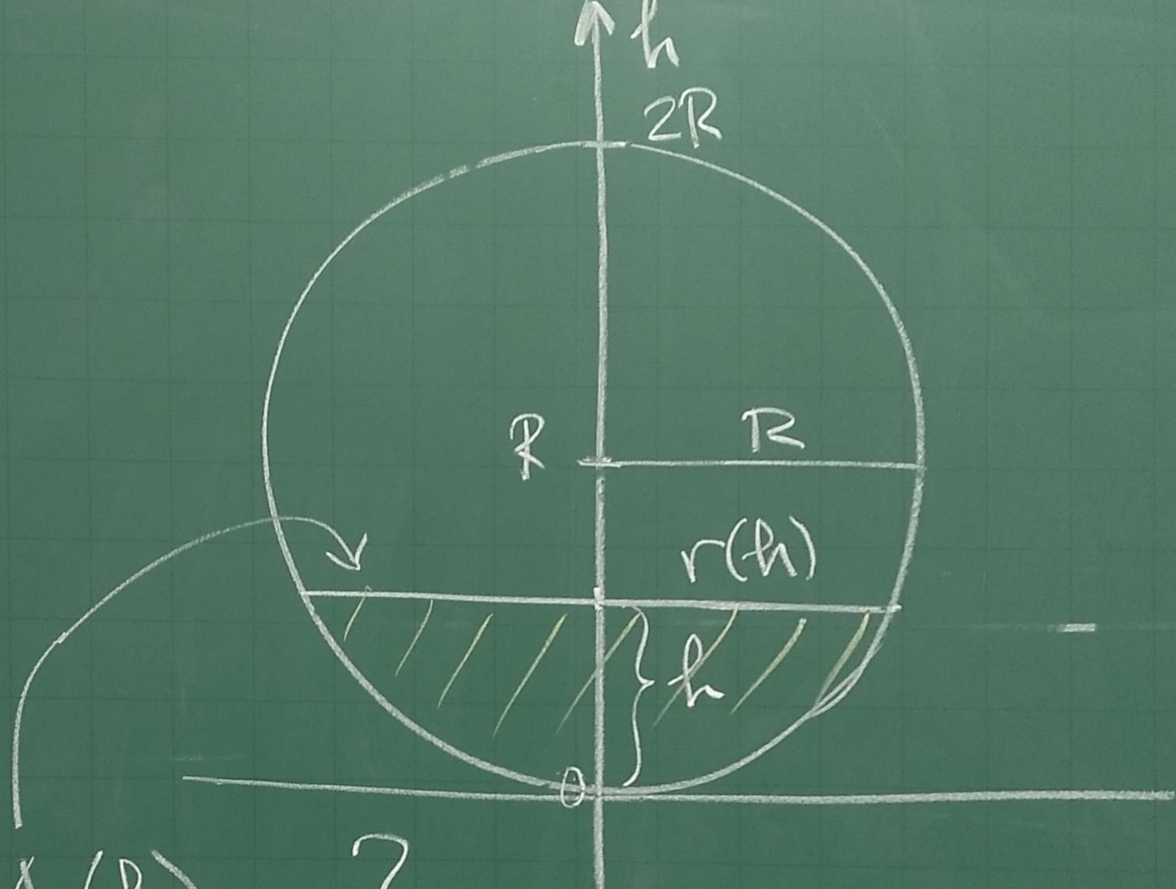
Volume total até h_0:



$A(h)\,\Delta h =$ área do retângulo

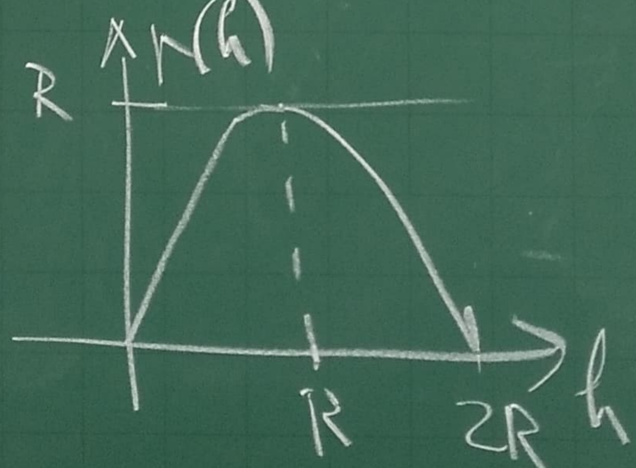
$$\boxed{\begin{matrix}\text{Volume} \\ \text{até } h_0\end{matrix} = \int_0^{h_0} A(h)\, dh}$$

Voltando à esfera, precisamos da função $A(h)$.



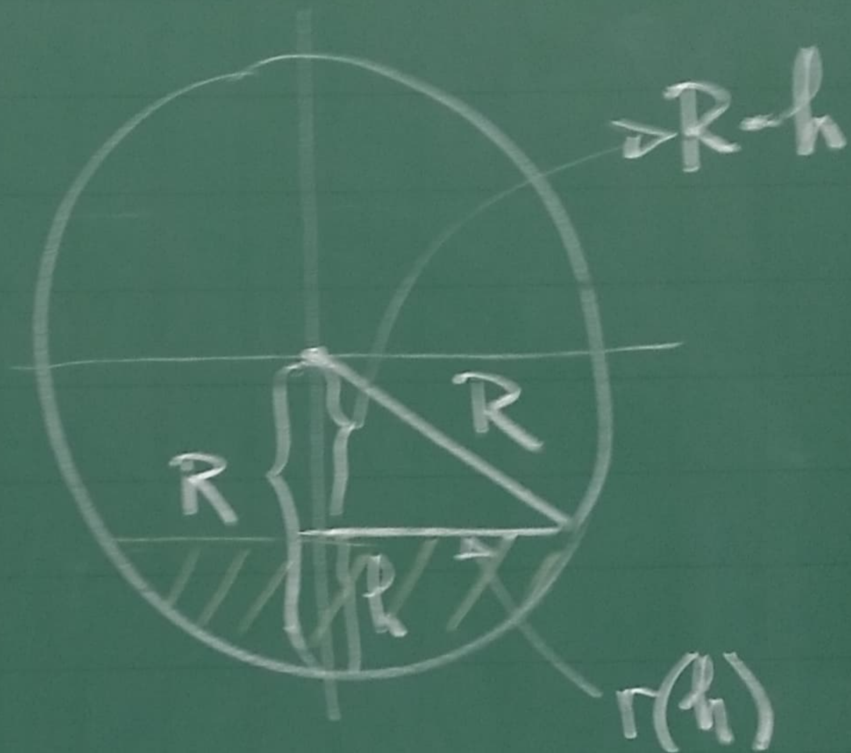
$\underline{\underline{A(h) = ?}}$

formato do corte?: círculo de raio $r(h)$.



$$A(h) = \pi\, r(h)^2$$

$$r(h) = ?$$



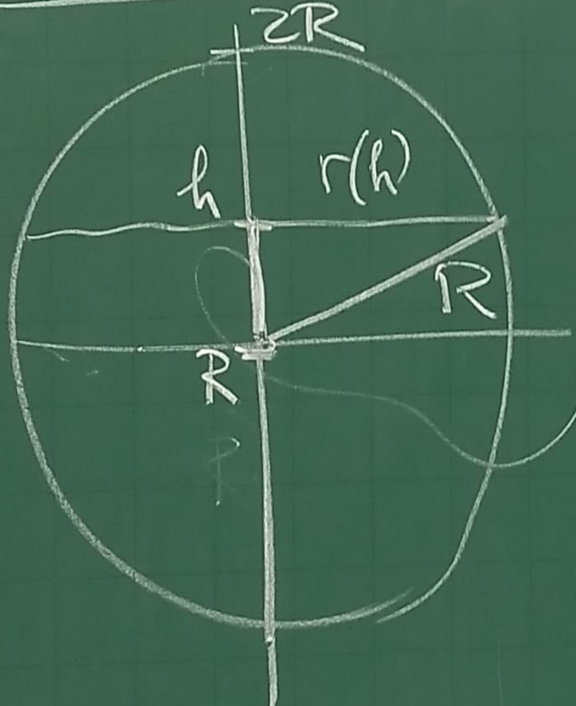
Pitágoras: $(R-h)^2 + r(h)^2 = R^2$

$$\Rightarrow r(h)^2 = R^2 - (R-h)^2$$
$$= \cancel{R^2} - \cancel{R^2} + 2Rh - h^2$$

$$\Rightarrow A(h) = \pi r(h)^2$$

$$\boxed{A(h) = \pi \left[2Rh - h^2 \right]} \quad (*)$$

Falta olhar caso $h \geq R$



$$\to h - R$$

$$\Downarrow$$

$$r(h)^2 = R^2 - (h-R)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{r(h)^2 = 2Rh - h^2}_{\text{mesma coisa!}}$$

Então vale $(*)$ p/ $\forall h \in [0, 2R]$.

$$V(h) = \int_0^h A(\xi)\, d\xi$$

"csi"

$$= \int_0^h \pi \left[2R\xi - \xi^2 \right] d\xi$$

$$= \underbrace{\pi \left[2R\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3} \right]}_{\text{primitiva do integrando}} \Bigg|_0^h =$$

$$= \pi \left[\cancel{2}R \cdot \frac{h^2}{\cancel{2}} - \frac{h^3}{3} \right] = \frac{\pi}{3} \left[3Rh^2 - h^3 \right]$$

$$\boxed{V(h) = \frac{\pi}{3}\left[3Rh^2 - h^3\right]}$$

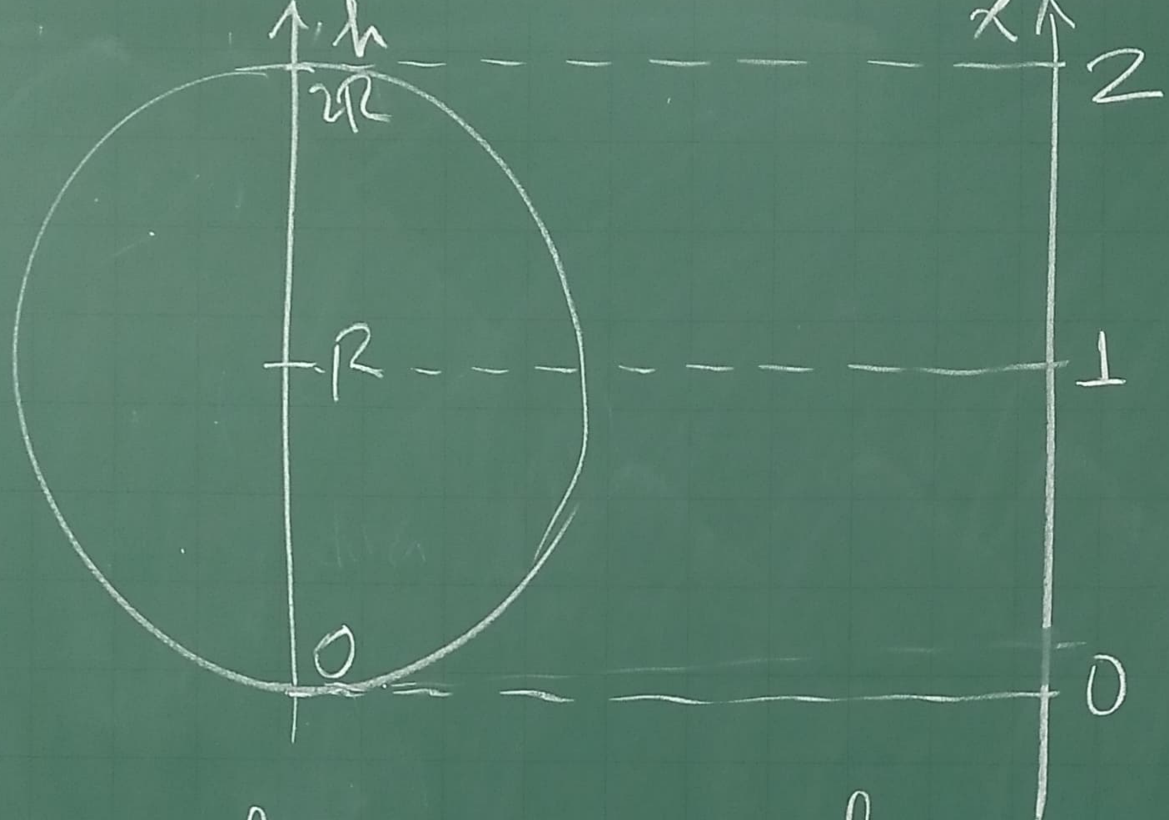
Volume relativo:

$$v(h) = \frac{V(h)}{V_{MAX}} = \frac{\frac{\pi}{\cancel{3}}\left[3Rh^2 - h^3\right]}{\frac{4}{\cancel{3}}\cancel{\pi}R^3}$$

$$v(h) = \frac{1}{4}\left[3\left(\frac{h}{R}\right)^2 - \left(\frac{h}{R}\right)^3\right]$$

a altura relativa a R.

$$\boxed{x \overset{\text{def.}}{=\!=} \frac{h}{R}}, \quad x \in [0,2]$$



Dado $h \rightsquigarrow x = \frac{h}{R}$

Dado $x \rightsquigarrow h = Rx$

$$\boxed{v(x) = \frac{1}{4}\left[3x^2 - x^3\right]}$$

Obs Sobre a derivada de $V(h)$ em $h=0$ e $h=2R$.

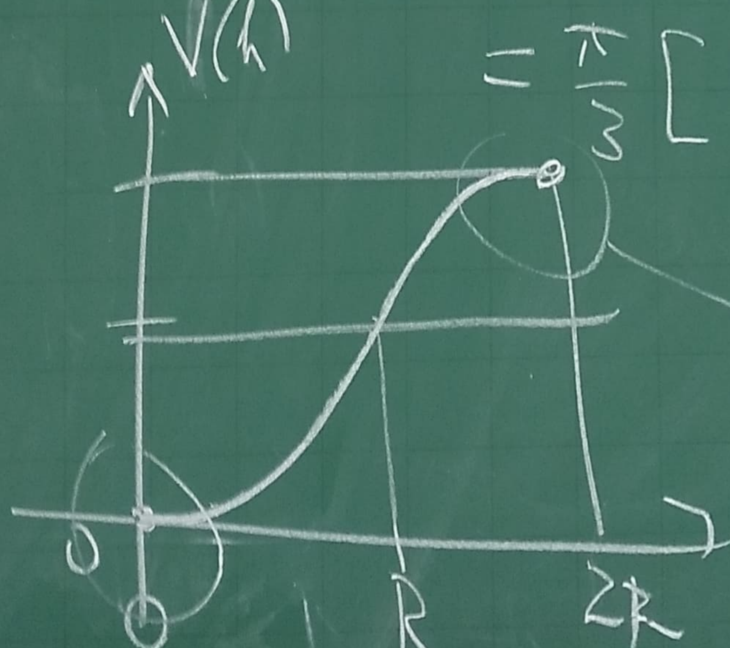
$$V(h) = \frac{\pi}{3}\left[3Rh^2 - h^3\right]$$

$$V'(h) = \frac{\pi}{3}\left[3R(2h) - 3h^2\right]$$

$$V'(0) = 0$$

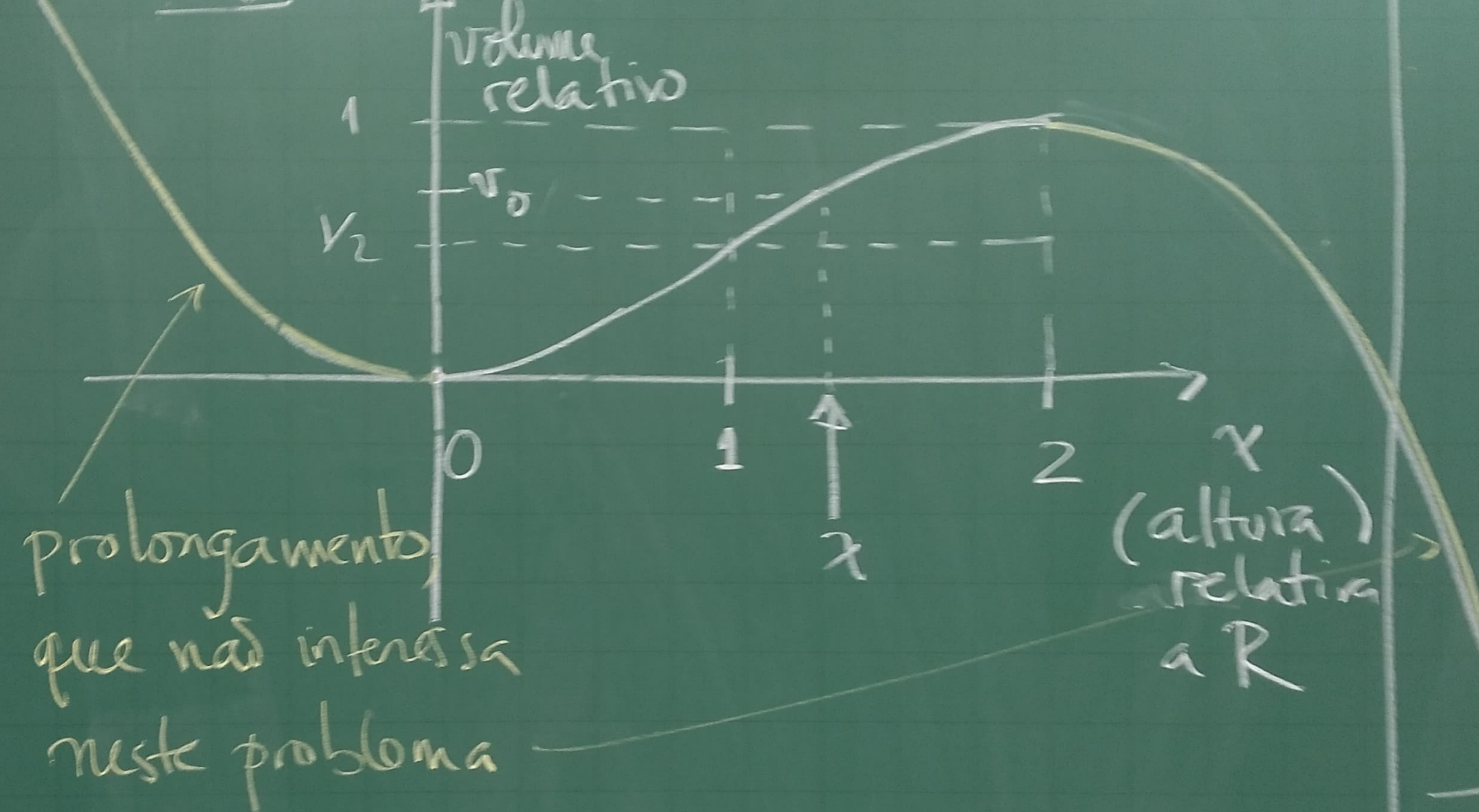
$$V'(2R) = \frac{\pi}{3}\left[3R(4R) - 3\cdot(2R)^2\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[12R^2 - 12R^2\right] = 0$$



derivada zero!

$v(x)$ → É CÚBICA!



Resumindo: 1) dado V_0 queremos h t.q. $V(h) = V_0$.

2) ou: $v(h) = \dfrac{V(h)}{V_{max}} = \dfrac{V_0}{V_{max}} = v_0$

Transformamos em: dado v_0 (relativo), achar h t.q. $v(h) = v_0$.

3) Mas trabalhamos c/ $x = \frac{h}{R}$.

Então descobriremos x t.q. $v(x) = v_0$ e depois $h = Rx$.

Suponha que fixemos $v_0 = 1/3$

Equação: $v(x) = 1/3$

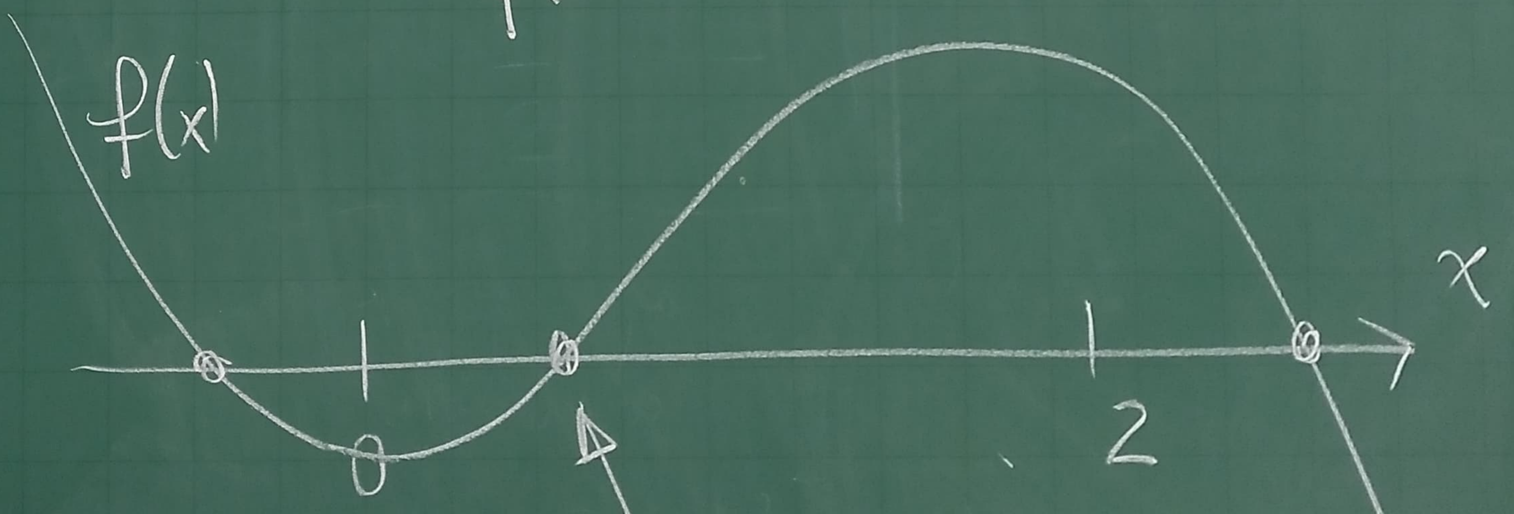
$$\boxed{\frac{1}{4}\left(3x^2 - x^3\right) = \frac{1}{3}}$$ equação

Colocamos tudo p/ um lado só:

$$\frac{1}{4}(3x^2 - x^3) - \frac{1}{3} = 0.$$

$\underline{\times 12}$ $$3(3x^2 - x^3) - 4 = 0$$

$$\underbrace{-3x^3 + 9x^2 - 4}_{f(x)} = 0$$



temos 3 raízes

esta é a raiz que interessa p/ o problema.

Ao usar o Método de Newton, como escolher x_0 p/ que o ponto de convergência das iterações seja a raiz procurada e não alguma raiz que não interessa?

Próx. aula: $\boxed{f(x) = -3x^3 + 9x^2 - 4}$