Lista 02 de MAP 3210 - 2023
BMA - BMAC - IME USP

Questão 1 Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(t,x) = t(x - x^2)$, tome $x_0 \in \mathbb{R}$ e considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad (*)$$

(i) Determine a solução não prolongável de $(*)$.

(ii) Denote por $D(x_0)$ o domínio da solução não prolongável de $(*)$ e determine o conjunto $A = \{x_0 \in \mathbb{R} : 1 \in D(x_0)\}$.

(iii) Mostre que $[0,1] \subset A$, chame φ_0 à solução não prolongável de $(*)$ com $x_0 = \frac{1}{2}$, e aplique o método de Euler explícito com $h = \frac{1}{10}$ para encontrar uma aproximação de $\varphi_0(t),\ t \in [0,1]$.

(iv) Use o método de Euler implícito com $h = \frac{1}{10}$ para encontrar uma aproximação de $\varphi_0(t),\ t \in [0,1]$.

(v) Repita os dois itens anteriores com $h = 0.05$.

(vi) Considere $n \in \mathbb{N}$, tome $x_0 = \frac{1}{2},\ t_0 = 0,\ h_n = \frac{1}{n}$ e, para $j = 1, 2, \ldots, n$, faça $t_j = t_{j-1} + h_n$ e

$$x_j = x_{j-1} + f(t_{j-1}, x_{j-1})h_n + \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_{j-1}, x_{j-1}) + \frac{\partial f}{\partial x}(t_{j-1}, x_{j-1}) f(t_{j-1}, x_{j-1})\right)\frac{h_n^2}{2}.$$

Explique porque é esperado que x_n seja uma aproximação de $\varphi_0(1)$ melhor do que a encontrada pelo método de Euler explícito ou implícito com o mesmo h_n.

(vii) Use o método exposto no item anterior com $n = 10$ e $n = 20$ e obtenha as aproximações de $\varphi_0(1)$ correspondentes.

(viii) Com as mesmas definições de (vi) para h_n e t_n, considere $\widetilde{x}_0 = \frac{1}{2}$ e para $j = 1, 2, \ldots, n$, faça $\widetilde{x}_j = \widetilde{x}_{j-1} + \frac{h_n}{2}[f(t_{j-1}, \widetilde{x}_{j-1}) + f(t_j, \widetilde{x}_j)]$. O valor de $\widetilde{x}_n$ assim obtido é uma aproximação de $\varphi_0(1)$. Obtenha essa aproximação para o caso $n = 10$ e $n = 20$.

(ix) Compare as aproximações encontradas em (iii), (iv), (v), (vii) e (viii) com o valor exato de $\varphi_0(1)$.

Questão 2 Considere Ω um aberto de $\mathbb{R}^p$ e $f : \Omega \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}^p$.
Suponha que todas as soluções não prolongáveis da e.d.o. $\dot{x} = f(x)$ estão definidas em $\mathbb{R}$ (uma equação assim chama-se *completa*) e, para $x_0 \in \Omega$, denote por φ_{x_0} à solução não prolongável do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Defina $\Phi : \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \Omega$ como $\Phi(t, x_0) = \varphi_{x_0}(t)$ e considere, para $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_t : \Omega \longrightarrow \Omega$, $\Phi_t(x) = \Phi(t, x)$ (esta função chama-se *fluxo no tempo* t de $\dot{x} = f(x)$).

(i) Demostre que, para todo $t \in \mathbb{R}$, Φ_t é contínua.

(ii) Demonstre que, para todos os reais t e s, tem-se $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$.

(iii) Prove que, para todo $t \in \mathbb{R}$, Φ_t é uma função bijetora de Ω em Ω.
Obs. A parte "ser injetora"é consequência imediata do famoso teorema de ... a parte ser sobrejetora segue-se do mesmo teorema, mas há um pequeno truque para fazer isso ficar "trivial", se quiser uma dica para isso, perguntar não é pecado, viu? E, ademais... continue lendo o exercício, uma dica vai aparecer um pouco adiante.

(iv) Mostre que Φ_t é inversível e sua inversa é ...
Sugestão: Note que Φ_0 é a função identidade de Ω em Ω e que $t + \ldots = 0$, agora use o item ... e fim.

Parabéns! Você acaba de ver a certidão de nascimento de Sistemas Dinâmicos!