Extremos, Assíntotas e Gráficos: Síntese e Aplicações Aula 23

Primeiro Semestre de 2023

Recordemos a definição de assíntotas verticais

Definição (Assíntota Vertical)

A reta $x = p$ é uma ***assíntota vertical*** *ao gráfico de f se*

$$\lim_{x \to p} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to p^-} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to p^+} f(x) = +\infty$$

ou

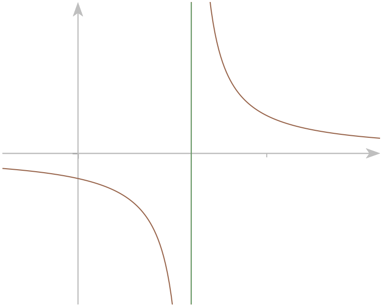
$$\lim_{x \to p} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to p^-} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to p^+} f(x) = -\infty.$$

Exemplo

A reta $x = 3$ é assíntota vertical de $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$.

De fato:

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2}{x-3} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 3^-} \frac{2}{x-3} = -\infty.$$



Agora, recordemos a definição de assíntotas horizontais

Definição (Assíntota Horizontal)

A reta $y = L$ é uma ***assíntota horizontal*** *ao gráfico de f se*

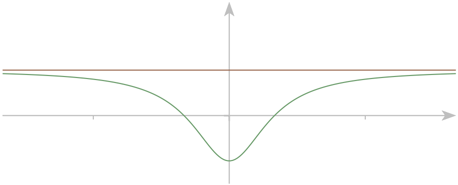
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Exemplo

A reta $y = 1$ é assíntota horizontal de $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

De fato: Isto segue do fato que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1.$$



Definição (Assíntota Oblíqua)

Seja f uma função. Se existir uma reta de equação $y = mx + n$ tal que

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$$

ou

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0,$$

então tal reta será dita uma **assíntota** *para f.*

Se $m = 0$, teremos uma **assíntota horizontal** *e, se $m \neq 0$, teremos uma* **assíntota oblíqua**.

Observação: A distância, na vertical, entre os gáficos de $y = f(x)$ e de $y = mx + n$, tende a 0 quando x tende a $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemplo

Determine as assíntotas de $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ *e esboce o gráfico.*

Solução: Como x^2+1 nunca é 0, não há assíntota vertical. Uma vez que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, não há assíntotas horizontais.
Escrevemos

$$\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1},$$

então

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2+1} - x = -\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0.$$

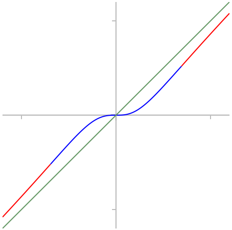
Portanto, a reta $y = x$ é uma assíntota oblíqua.

Para esboçar o gráfico calculamos as derivadas

$$f'(x) = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}, \qquad f''(x) = \frac{-2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}.$$

Logo, $x = 0$ é o único ponto crítico, f é estritamente crescente, e não tem máximos ou mínimos. Para a derivada segunda, temos

- se $x \in (-\infty, -\sqrt{3})$ ou $x \in (0, \sqrt{3}) \Rightarrow f'' > 0$ $\Rightarrow f$ tem concavidade para cima,
- se $x \in (-\sqrt{3}, 0)$ ou $x \in (\sqrt{3}, +\infty) \Rightarrow f'' < 0$ $\Rightarrow f$ tem concavidade para baixo.



Procedimento para determinar assíntotas quando $x \to +\infty$:
Primeiro determine m, caso exista, através do limite

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Em seguida, calcule

$$n = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx].$$

Se n for finito então $y = mx + n$ será assíntota para $x \to +\infty$.
Um procedimento análogo para assíntotas quando $x \to -\infty$.

Exemplo

Determine as assíntotas de $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1}$ e esboce o gráfico.

Temos

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x} = \begin{cases} \sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} & \text{se } x > 0 \\ -\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Segue que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ e $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -2.$

Assim $m = 2$ para $x \to +\infty$ e $m = -2$ para $x \to -\infty$.

Determinemos agora o valor de n.

$$\lim_{x\to+\infty} [\sqrt{4x^2+x+1} - 2x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+x+1}+2x} = \frac{1}{4}.$$

Logo, $y = 2x + \frac{1}{4}$ é assíntota para $x \to +\infty$.

Analogamente vemos que $y = -2x - \frac{1}{4}$ é assíntota para $x \to -\infty$.

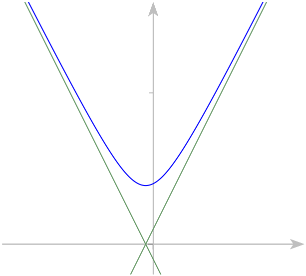
Para esboçar o gráfico calculamos as derivadas

$$f'(x) = \frac{8x+1}{2\sqrt{4x^2+x+1}} \qquad f''(x) = \frac{15}{4\sqrt{4x^2+x+1}(4x^2+x+1)}.$$

O único ponto crítico é $x = -\dfrac{1}{8}$ que é um ponto de mínimo local.

Como $f'' > 0$, f tem concavidade para cima para todo x.

Note também que $4x^2 + x + 1 = (2x + 1/4)^2 + 15/16$!



Lista de passos úteis para esboçar o gráfico de uma função.

1. **Explicite o domínio da função.**
2. Calcule os limites laterais de f nos pontos onde f não é contínua ou não estiver definida.
3. **Calcule os limites de f para $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.**
4. Determine as assíntotas oblíquas.
5. **Localize as raízes de f.**
6. Encontre os pontos críticos e determine os intervalos de crescimento e de decrescimento.
7. **Determine os pontos de máximo e mínimo e calcule os valores da função nestes pontos.**
8. Estude a concavidade e destaque os pontos de inflexão.
9. **Esboce a curva utilizando todas as informações anteriores.**

Exercício:

(a) Mostre que

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-x^2}-\sqrt[3]{3}\,x+\frac{\sqrt[3]{3}}{9}\right)=0.$$

(b) Conclua que a reta de equação $y=\sqrt[3]{3}\,x-\dfrac{\sqrt[3]{3}}{9}$ é uma assíntota de f.

Exercício: Esboce o gráfico das seguintes funções:

$$(a)\ f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}; \quad (b)\ f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+1}};$$

$$(c)\ f(x) = xe^x; \qquad (d)\ f(x) = \ln(4-x^2);$$

$$(e)\ f(x) = \frac{x^4+1}{x^2}; \quad (f)\ f(x) = \sqrt[3]{x^3-x^2}.$$

Aplicações de Mínimos e Máximos de Funções

Os métodos estudados para encontrar máximos e mínimos de funções podem ser aplicados para resolver problemas práticos.

O primeiro passo consiste em compreender bem o problema e encontrar um modelo matemático para o mesmo, ou seja, convertê-lo em um problema matemático encontrando a função que dever ser maximizada ou minimizada.

Exemplo

Encontre as dimensões do triângulo isósceles de maior área que esteja inscrito na circunferência de raio R.

Solução: Sejam $x = |AC|$ a altura do triângulo, $y = 2|CD|$ a base e $z = |AD|$ a medida de um dos lados congruentes.

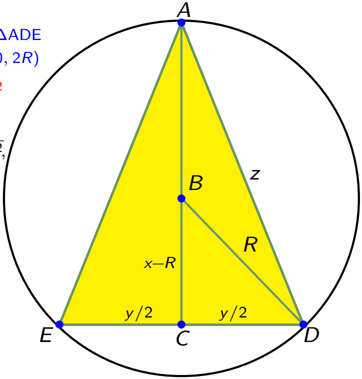
Área do Triângulo ΔADE

$A = \frac{1}{2}xy, \ \ x, y \in (0, 2R)$

$\left(\frac{y}{2}\right)^2 + (x-R)^2 = R^2$

$y = 2\sqrt{2Rx - x^2}$

$A(x) = x\sqrt{2Rx - x^2}$, $x \in (0, 2R)$



Logo, nosso problema é maximizar a função

$$\boxed{A(x) = x\sqrt{2Rx - x^2} \qquad x \in (0, 2R).}$$

Calculando a derivada

$$\boxed{A'(x) = \frac{x(3R-2x)}{\sqrt{2Rx-x^2}},}$$

temos que ou $x = \frac{3}{2}R$ é o único candidato a ponto de máximo no intervalo $(0, 2R)$.

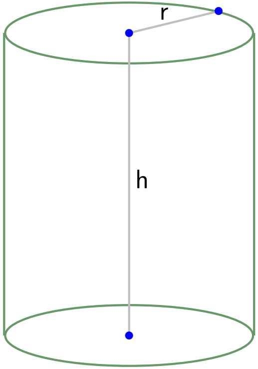
Analisando o sinal da derivada primeira vemos que de fato $x = \frac{3}{2}R$ é um ponto de máximo. Portanto as dimensões são

altura $\boxed{x = \frac{3}{2}R,}$ base $\boxed{y = \sqrt{3}R}$ e $\boxed{z^2 = \frac{9}{4}R^2 + \frac{3}{4}R^2 = 3R^2.}$

Logo o triângulo é equilátero.

Exemplo

Uma lata cilíndrica é feita para receber um litro de óleo. Encontre as dimensões que minimizam o custo do metal para produzir a lata, sabendo que o custo do material da tampa e do fundo é o dobro do custo do material da lateral, por unidade de área.



Solução: Seja r o raio da lata e h a altura em cm. Para minimizar o custo do material minimizamos (onde k é uma constante)

$$C = 2k(2\pi r^2) + k(2\pi rh).$$

Agora, como o volume $V = \pi r^2 h = 1000cm^3$, $h = \frac{1000}{\pi r^2}$. Substituindo na expressão da área total obtemos

$$C(r) = 2k\left(2\pi r^2 + \pi r \frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2k\left(2\pi r^2 + \frac{1000}{r}\right).$$

Logo, nosso problema é minimizar a função

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{1000}{r}, \;\; r > 0.$$

Calculamos a derivada

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{1000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 250)}{r^2}.$$

O ponto crítico é $r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$. Como $S'(r) < 0$ se $r < \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$ e $S'(r) > 0$ se $r > \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$ concluímos que $r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$ é um ponto de mínimo de S.

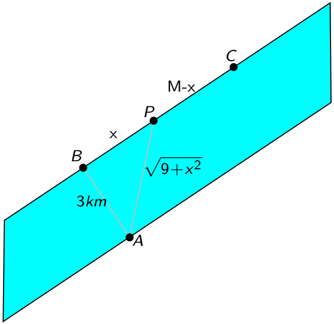
Logo, as dimensões que minimizam o custo do material são:

$$\text{raio } r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \quad \text{e altura } h = \frac{1000}{\pi}\left(\frac{\pi}{250}\right)^{2/3} = 4\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} = 4r.$$

Assim, a altura deve ser igual ao dobro do diâmetro da lata.

Exemplo

Os pontos A e B estão em lados opostos de um rio reto com 3km de largura. O ponto C está na mesma margem que B, mas Mkm rio abaixo. Uma companhia telefônica deseja estender um cabo de A até C. Se o custo por km de cabo é 25% maior sob a água do que em terra, como deve ser estendido o cabo, de forma que o custo seja menor para a companhia?



Seja P um ponto na mesma margem que B e C e entre B e C, de tal forma que o cabo será estendido de A para P e deste para C.
Se x é a distância de B a P, $M-x$ é a distância de P até C, $x \in [0, M]$, k é o custo por km em terra e $\frac{5}{4}k$ é o custo por km sob a água. Então, o custo total é

$$C(x) = \frac{5}{4}k\sqrt{9+x^2} + k(M-x), \; 0 \leq x \leq M.$$

Para encontrar o valor mínimo de C, determinamos seus pontos críticos.

$$C'(x) = \frac{5kx}{4\sqrt{9+x^2}} - k.$$

Logo $x = 4$ é o único ponto crítico em $[0, \infty)$. $C'(x) < 0$ se $x \in [0, 4]$ e $C'(x) > 0$ se $x > 4$.

Se $M \leq 4$ o mínimo ocorre em $x = M$, já que $C(x)$ será estritamente decrescente em $[0, M]$, e todo o trajeto deve ser feito sob a água.

Por outro lado, se $M > 4$, o mínimo ocorre quando $x = 4$ pois $C'(x) < 0$ se $x < 4$ e $C'(x) > 0$ se $x > 4$.