MAT0164 - Números Inteiros: uma introdução à matemática

Lista 4

Indução

1º Semestre de 2023

(1) Seja $P(t)$ uma sentença aberta que depende da variável t e n_0 um número natural. Prove que vale o seguinte princípio de indução generalizado: se $P(n_0)$ é verdadeiro e $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ para todo $n \geq n_0$, então $P(t)$ é verdadeira para todo $t \geq n_0$.

(2) Seja $P(t)$ uma sentença aberta que depende da variável t e n_0 um número natural. Prove que vale o seguinte princípio de indução (chamado de *indução forte*): se $P(n_0)$ é verdadeiro e, para todo $n \geq n_0$, a sentença (se $P(m)$ é verdadeira para todo m tal que $n_0 \leq m \leq n$, então $P(n+1)$ é verdadeira) é verdadeira, então $P(t)$ é verdadeira para todo $t \geq n_0$.

(3) Seja $P(t)$ uma sentença aberta que depende da variável t e n_0 um número natural. Prove que vale o seguinte princípio de indução (chamado de *indução reversa*): se $P(n_0)$ é verdadeiro e $P(n+1) \Rightarrow P(n)$ para todo natural $n < n_0$, então $P(t)$ é verdadeira para todo t natural tal que $t \leq n_0$.

(4) Prove o *Princípio da boa ordenação*: todo subconjunto não-vazio formado por números naturais possui um menor elemento, ou seja, para todo $S \subseteq \mathbb{N}$, vale o seguinte: se $S \neq \emptyset$, então existe $n \in S$ tal que $n \leq m$ para todo $m \in S$.

(5) Prove que

(a) $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}, \forall n \geq 1;$

(b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \geq 1;$

(c) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2, \forall n \geq 1.$

(6) Prove por indução as seguintes desigualdades:

(a) [Desigualdade de Bernoulli] $(1+h)^n \geq 1 + nh$, para todo número real $h \geq -1$ e inteiro $n \geq 0$.

(b) $3^n \geq n^3$, para todo natural $n \geq 4$.

(c) $n^3 < 2^n$, para todo $n \geq 10$.

(d) $2n^3 < 3n^2 + 3n + 1$, para todo $n \geq 3$.

(7) Prove por indução que

(a) $n^3 + 2n$ é sempre divisível por 3 para todo $n \geq 0$;

(b) $5^n - 4n + 15$ é sempre divisível por 16 para todo $n \geq 0$;

(c) $2n^3 + 3n^2 + 7n$ é sempre divisível por 6 para todo $n \geq 0$.

(d) $4^{2n-1} + 1$ é sempre divisível por 5 para todo $n \geq 1$.

(e) $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ é sempre divisível por 11 para todo $n \geq 1$.

(8) Determine o menor inteiro positivo k com a seguinte propriedade: se $n \geq k$, então existem a e b naturais tais que $5a + 3b = n$.

(9) Sejam a e r dois números reais. Dizemos que a sequência $(a_1, \ldots, a_n)$, onde $a_1 = a, a_2 = a + r, a_3 = a + 2r, \ldots, a_n = a + (n-1)r$ é uma *progressão aritmética* de razão r. Prove, utilizando o princípio de indução finita, que a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a + (a+r) + (a+2r) + \ldots + (a+(n-1)r) = \frac{n(2a+(n-1)r)}{2}$$

(10) Considere a seguinte sequência de somas:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2!} &= \tfrac{1}{2} \\
\tfrac{1}{2!} + \tfrac{2}{3!} &= \tfrac{5}{6} \\
\tfrac{1}{2!} + \tfrac{2}{3!} + \tfrac{3}{4!} &= \tfrac{23}{24} \\
\tfrac{1}{2!} + \tfrac{2}{3!} + \tfrac{3}{4!} + \tfrac{4}{5!} &= \tfrac{119}{120}
\end{aligned}$$

e seja $P(n)$ a soma

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{n-1}{n!}$$

Determine uma expressão para $P(n)$ e, em seguida, utilizando o Princípio da Indução Finita, prove sua validade para $n \geq 2$.

(11) Prove que se $n \geq 3$, então a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é

$$(n-2) \cdot 180^\circ.$$

(12) Seja S uma coleção finita de $n \geq 3$ pontos no plano, não todos colineares.

(a) Prove que existe uma reta que contém exatamente dois pontos de S.
[Dica:] Considere o ponto p de S e a reta r contendo pelo menos dois pontos de S tais que p não contém r e tal que a distância entre p e r é a menor possível.

(b) Prove que existem pelo menos n retas distintas que contém pelo menos dois pontos de S.

(13) Sabe-se que a forma trigonométrica do número complexo $z = a + bi$ é dada por

$$z = \rho(\cos\theta + i\text{sen}\theta),$$

onde $\theta = \arg z$ e $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Prove, utilizando o Princípio de Indução Finita, a fórmula de De Moivre, isto é, se $z = \rho(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$, então

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta)), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(14) Seja n natural. Prove que existe um polinômio P_n de grau n e coeficientes inteiros tal que $P_n(\cos x) = \cos nx$ para todo x real. Qual o coeficiente independente de P_n? Qual é o coeficiente líder de P_n?

(15) Dois produtos notáveis muito conhecidos são os chamados diferença de quadrados e diferença de cubos:

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$
$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

(a) Prove que $x - y$ divide $x^n - y^n$ para quaisquer inteiros x, y e n natural.

(b) Prove que $x + y$ divide $x^n + y^n$ para quaisquer inteiros x, y e n natural ímpar.

(16) Seja P um polinômio de coeficientes inteiros. Prove que $x - y$ divide $P(x) - P(y)$ para quaisquer inteiros x, y. O resultado ainda é verdadeiro se assumirmos apenas que $P(m)$ é inteiro para todo inteiro m?

(17) Para todo inteiro $n \geq 1$, prove que

(a) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \dfrac{x^n}{1-x}$ se $x \neq 1$;

(b) $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

(18) [Binômio de Newton] Seja n natural. Prove que existem inteiros $\binom{n}{k}$, onde $0 \leq k \leq n$ tais que, para todos a e b reais (ou complexos),

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Além disso, ponha $\binom{n}{k} = 0$ se $0 \leq k < n$.

(a) Prove que, para todos m, n naturais, vale

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

(b) Encontre uma fórmula explícita para $\binom{n}{k}$ quando $n \geq k$.

(19) Seja n um natural. Mostre que

(a) $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0;$

(b) $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n};$

(20) Sejam n e k inteiros não-negativos com $k \leq n$. Prove que

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{n}{j} = (-1)^k\binom{n-1}{k}.$$

(21) Prove por indução finita para todo $n > 1$ que

(a) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24};$

(b) $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \dfrac{n+1}{2n};$

(c) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1;$

(d) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)} = \dfrac{n}{n+1}.$

(22)

(a) Considere a sequência de números inteiros $(a_n)_{n \geq 0}$ dada por

$$a_n = \begin{cases} 2, & \text{se } n = 0; \\ 3, & \text{se } n = 1; \\ 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Mostre que

$$a_n = 2^n + 1, \quad \forall n \geq 0.$$

(b) Considere a sequência de números inteiros $(b_n)_{n \geq 0}$ dada por

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0; \\ 1, & \text{se } n = 1; \\ 3b_{n-} - 2b_{n-2}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Mostre que

$$b_n = 2^n - 1, \quad \forall n \geq 0.$$

(c) Considere a *Sequência de Fibonacci* $(f_n)_{n\geq 0}$ dada por

$$f_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0; \\ 1, & \text{se } n = 1; \\ f_{n-1} + f_{n-2}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Mostre que, para todo $n \geq 1$,

(i) $f_n^2 - f_{n+1}f_{n-1} = (-1)^{n+1}$;

(ii) $f_{n+1}f_{n+2} - f_n f_{n+3} = (-1)^n$.

(23) Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ a sequência definida por $a_1 = 1$, e, para todo inteiro $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}\right)^n \cdot (n+1).$$

(a) Calcule a_2, a_3 e a_4.

(b) Deduza uma fórmula fechada para a_n e prove-a por indução.

(24) Seja $(b_n)_{n\geq 0}$ a sequência definida por $b_1 = 1$, e, para todo par de inteiros não negativos m e n com $m \geq n$,

$$b_{m+n} + b_{m-n} = \frac{1}{2}(b_{2m} + b_{2n}).$$

(a) Calcule b_0, b_2, b_3 e b_4.

(b) Deduza uma fórmula fechada para b_n e prove-a por indução.

(25) Prove que, se n é um múltiplo de 5, então f_n também é múltiplo de 5.

(26) Prove que, se n é um múltiplo de 8, então f_n é múltiplo de 7.
[Dica:] Prove que $f_{n+8} = 7f_{n+4} - f_n$.

(27) Seja $(f_n)_{n\geq 0}$ a sequência de Fibonacci, e sejam $\varphi > \bar{\varphi}$ as soluções da equação $x^2 = x + 1$. Prove que, para todo n natural,

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \bar{\varphi}^n\right).$$

(28) Prove que todo número natural pode ser representado como uma soma de números de Fibonacci distintos.

(29) [Bases numéricas] Seja $b > 1$ um inteiro. Prove que, para todo $n \geq 1$ natural, existem únicos naturais t e $d_0, d_1, \ldots, d_t$ tais que $d_t \neq 0$, $0 \leq d_i < b$ para todo $1 \leq i \leq t$ e $n = \sum_{i=0}^{t} d_i \cdot b^i$.

(30) Prove que, para todo $n \geq 1$, é possível cobrir (sem intersecções) um tabuleiro $2^n \times 2^n$ com uma casa removida usando peças em formato de 'L' (ou seja, peças formadas por três quadrados 1×1 com esse formato).

(31) Encontre todas as funções $f\colon \{1, 2, \dots\} \to \{1, 2, \dots\}$ tais que, para todo inteiro positivo n,

$$f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n.$$

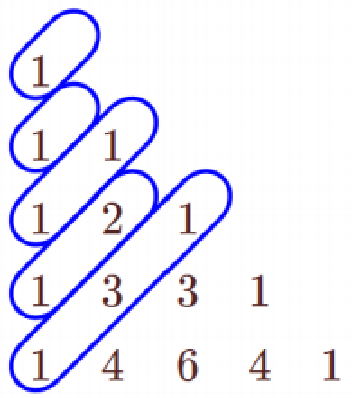
(32) [Pizza de Steiner] Qual é o maior número de partes em que se pode dividir o plano com n retas?

(33) O que há de errado com a seguinte demonstração por indução de que para todo inteiro positivo n nós temos $a^{n-1} = 1$?

> Demonstração: Para $n = 1, a^{1-1} = a^0 = 1$, correto. Assumindo o teorema válido para $k \leq n$, temos para $n + 1$:
>
> $$a^{(n+1)-1} = a^n = \frac{a^{n-1} \cdot a^{n-1}}{a^{n-2}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1,$$
>
> como desejávamos.

(34) Suponha um campeonato de futebol com $n \geq 2$ times onde todos jogam contra todos uma única vez. Prove por indução que o número total de jogos é $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

(35) Faça uma conjectura sobre as somas das diagonais ascendentes no Triângulo de Pascal conforme indicado. Prove que sua conjectura é verdadeira.



(36) Prove que $ab^n + cn + d$ será divisível pelo inteiro positivo m para todo $n \geq 0$ quando $a + d$, $(b-1)c$ e $ab - a + c$ forem divisíveis por m.

(37) Sejam $S_1, \dots, S_n$ conjuntos. Prove que $x \in S_1 \triangle \cdots \triangle S_n$ se, e somente se, x pertence a uma quantidade ímpar dos conjuntos S_i (por exemplo, para $n = 2$, $x \in S_1 \triangle S_2$ se, e somente se, x pertence a exatamente um dos conjuntos S_1, S_2).

(38) Suponha que $x + \dfrac{1}{x} = d$ é um inteiro.

(a) Prove que $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ também é um inteiro, qualquer que seja o número natural n.

(b) Encontre todos os valores de $d \geq 2$ tais que 194 é um termo da sequência

$$\left\{ x + \frac{1}{x}, x^2 + \frac{1}{x^2}, x^3 + \frac{1}{x^3}, \ldots \right\}.$$

(39) Um país tem um certo número $n \geq 2$ de cidades com a seguinte propriedade: todo par de cidades é ligado por uma estrada de mão única (ou seja, para cada par de cidades A e B, é possível ir diretamente de A a B ou de B a A, mas não ambos).

(a) Prove que é possível fazer um caminho seguindo as estradas na mão correta que passa por todas as cidades exatamente uma vez, ou seja, é possível ordenar as cidades como $c_1, c_2, \ldots, c_n$ de modo que há uma estrada indo diretamente de c_1 a c_2, uma de c_2 a c_3, ..., e uma de c_{n-1} a c_n.

(b) Mostre que, para todo $n \geq 2$, existe um país com a propriedade do enunciado, com exatamente n cidades, e tal que só há um caminho como no item (a).

(40) Seja f a função definida nos reais positivos tal que $f(x) = e^{-1/x}$ para todo $x > 0$. Prove que, para todo $n \geq 1$, existe um polinômio de coeficientes reais P_n tal que $f^{(n)}(x) = P_n(1/x)e^{-1/x}$ para todo $x > 0$.

(41) Prove que, para todo $n \geq 6$, é possível particionar qualquer quadrado em n quadrados (não necessariamente congruentes entre si). Por exemplo, a figura abaixo mostra um quadrado dividido em 7 quadrados: