Física 3 IFUSP
17 de Maio de 2023

Prof. José Roberto B. Oliveira

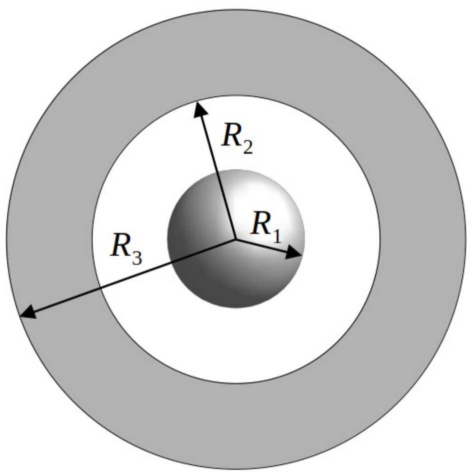
Prova 2

Gabarito

1) [2,0] Uma esfera de material isolante com raio R_1 está carregada não uniformemente com uma densidade volumétrica de carga elétrica dada, em coordenadas esféricas com origem no centro da esfera, pela expressão:

$$\rho(r,\theta,\phi)=\rho_0\frac{e^{-ar}}{a^2r^2}$$

Esta esfera está no centro de uma esfera condutora oca, inicialmente descarregada, de raio interno R_2 e raio externo R_3, conforme esquematizado na figura.



Após atingido o equilíbrio eletrostático:
a) Determine a expressão para o campo elétrico no interior da esfera $r<R_1$.
Como o sistema possui simetria esférica, o campo elétrico deve ser radial e dependente exclusivamente de r. O fluxo do campo elétrico através de uma superfície de Gauss esférica de raio $r<R_1$, é, conforme a lei de Gauss:

$$4\pi r^2 E_r=\frac{Q_{\text{int}}(r)}{\varepsilon_0}=\frac{4\pi}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho(r)r^2dr=4\pi\frac{\rho_0}{\varepsilon_0 a^2}\int_0^r e^{-ar}dr=4\pi\frac{\rho_0}{a^3}(1-e^{-ar})$$

Portanto $\vec{E}(\vec{r})=E_r\hat{r}=\frac{\rho_0}{\varepsilon_0 a^3}\frac{(1-e^{-ar})}{r^2}\hat{r},\{r<R_1\}$.

b) Determine o campo elétrico nas regiões do espaço (em vácuo) entre R_1 e R_2.
Uma superfície de Gauss esférica nessa região contém a carga total da esfera interna:

$$Q_{tot}=4\pi\int_0^{R_1}\rho(r)r^2\,dr=4\pi\frac{\rho_0}{a^2}\int_0^{R_1}e^{-ar}\,dr=4\pi\frac{\rho_0}{a^3}\left(1-e^{-aR_1}\right)$$

Portanto o campo elétrico será:

$$\vec{E}(\vec{r})=E_r\hat{r}=\frac{\rho_0}{\varepsilon_0 a^3}\frac{\left(1-e^{-aR_1}\right)}{r^2}\hat{r}\,,\ \{R_1\leq r<R_2\}\,.$$

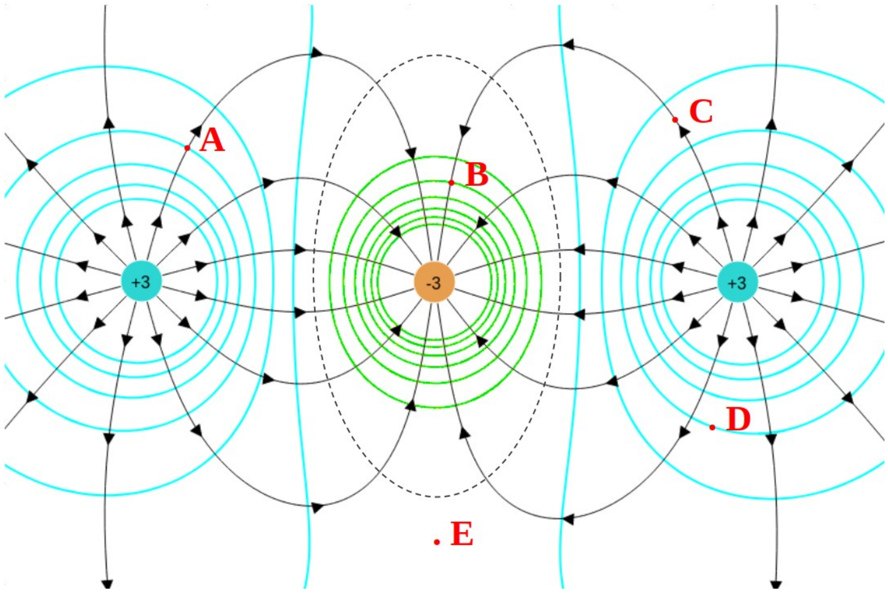
c) Determine a densidade de carga acumulada na superfície externa do condutor. Explique os passos de seu raciocínio.

No interior do material condutor em equilíbrio eletrostático o campo elétrico é nulo, portanto uma superfície esférica com raio r nessa região de $R_2<r<R_3$ deve conter uma carga total nula. A carga da superfície interna do condutor deve anular a carga da esfera isolante interna, portanto tem a mesma magnitude que esta, mas com o sinal trocado. Sendo o condutor inicialmente neutro, a carga na sua superfície externa deve então ser igual à da esfera interna: $Q_{tot}=4\pi\frac{\rho_0}{a^3}\left(1-e^{-aR_1}\right)$ e a densidade superficial de carga será: $\sigma=\frac{Q_{tot}}{4\pi R_3^2}=\frac{\rho_0}{a^3}\frac{\left(1-e^{-aR_1}\right)}{R_3^2}$.

d) Caso a expressão para a densidade tivesse uma dependência angular, mas preservando a carga total da esfera interna, como se modificaria (ou não) a resposta do item anterior? Explique.

A resposta não se modificaria, uma vez que o campo elétrico no interior do material condutor permaneceria nulo. A mesma carga $-Q_{tot}$ teria que ser acumulada na superfície interna do condutor, mas de forma não uniforme de modo a compensar pela dependência angular da distribuição da carga $+Q_{tot}$ da esfera interna. Assim, a mesma carga $+Q_{tot}$ seria distribuída uniformemente na superfície externa do condutor, de forma a manter nulo o campo em seu interior.

2) [2,0] Linhas de campo elétrico e curvas equipotenciais foram desenhadas para um sistema de 3 cargas elétricas na figura abaixo. As equipotenciais são apresentadas a intervalos regulares de tensão, desde $-V_0$ até $+V_0$, sendo que a referente ao potencial nulo $(V=0)$ está marcada em linha tracejada. Alguns pontos indicados por letras (ABCDE) foram marcados para referência no enunciado.



Justifique cada resposta:

a) Liste os pontos em ordem crescente de potencial elétrico.

O menor potencial é o de "B" pois está sobre uma equipotencial negativa. "E" está entre o potencial nulo (tracejada) e a equipotencial positiva de menor valor, seguida por C, e D e A que, pela simetria do sistema estão no mesmo potencial. Assim a ordem crescente de potencial é: B<E<C<A=D.

b) Os pontos B e C estão conectados através de uma mesma linha de campo. Se uma carga positiva puntiforme de teste é levada de C até B por um caminho coincidente com a linha de campo, o trabalho realizado pela Força de Lorentz sobre essa carga é positivo ou negativo? Se essa mesma carga é levada diretamente de C a B por um caminho retilíneo entre esses dois pontos, o trabalho é igual ou diferente?

Ao longo do caminho de C a B a linha de campo tem o mesmo sentido do deslocamento portanto o trabalho da força elétrica é positivo $\vec{F}=q\vec{E}$. Pelo caminho retilíneo o trabalho é o mesmo porque o campo eletrostático é conservativo.

c) Em qual dos pontos marcados, o campo elétrico é mais intenso?

Em B porque as linhas de campo são mais concentradas, e as equipotenciais estão mais próximas.

d) A diferença de potencial entre o ponto A e o D é positiva, negativa, ou nula?

É nula porque os pontos estão em equipotenciais de mesmo valor dada a simetria da disposição das cargas do sistema.

e) Por quê as linhas de campo são perpendiculares às superfícies equipotenciais?

Porque ao longo das equipotenciais não há variação do potencial e portanto a integral de linha do campo elétrico (que não é nulo) seria nula. O campo elétrico está na direção do gradiente do potencial, que é perpendicular às curvas equipotenciais, embora tenha o sentido oposto.

3) [2,0] Um campo de forças é dado em certa região plana do espaço pela expressão:

$$\vec{F}(x,y)=axy\,\hat{\imath}-axy\,\hat{\jmath}$$

a) Determine o trabalho W_1 realizado por essa força ao transportar uma partícula por um caminho retilíneo do ponto (0,R) até o ponto (R,R), seguido por outro trecho retilíneo de (R,R) até (R,0), conforme a figura.

$$W_1=\int_0^R \vec{F}(x,R).\hat{\imath}\,dx+\int_R^0 \vec{F}(R,y).\hat{\jmath}\,dy=\int_0^R axR\,dx+\int_0^R aRy\,dy=\frac{aR^2}{2}R+\frac{aR^2}{2}R=aR^3$$

b) Determine o trabalho W_2 realizado por essa força ao transportar a partícula pelo arco de círculo de raio R centrado na origem, do ponto (R,0) até o ponto (0,R).

$$W_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\vec{F}(x,y).\hat{\theta}]R\,d\theta=\int_o^{\frac{\pi}{2}}[aR\cos\theta R\sin\theta(-\sin\theta)-aR\cos\theta R\sin\theta\cos\theta]R\,d\theta$$

$$W_2=aR^3\left[\int_o^{\frac{\pi}{2}}-\sin^2\theta\cos\theta d\,\theta\ -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta d\,\theta\right]=aR^3\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin^2\theta d(\sin\theta)+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d(\cos\theta)\right]$$

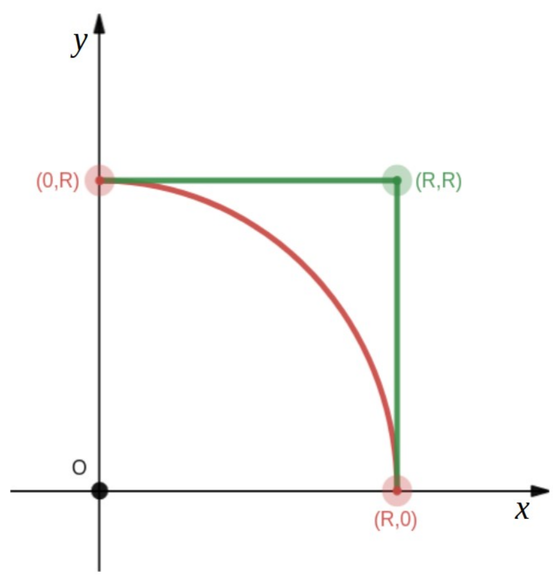
$$W_2=aR^3[-(\frac{1^3}{3}-0)+(0-\frac{1^3}{3})]=-\frac{2}{3}aR^3$$

c) Com base nos resultados anteriores, argumente se esse campo de forças é conservativo ou não.

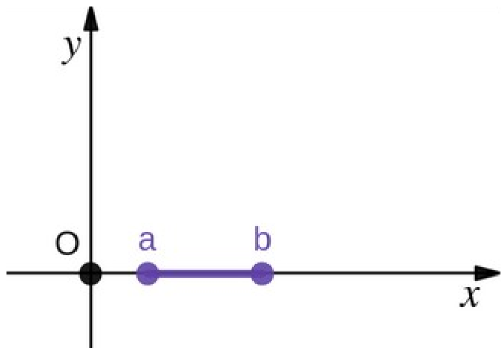
Esse campo não é conservativo porque o trabalho realizado em um caminho fechado obtido da sequência dos dois caminhos: $W_1+W_2=aR^3-\frac{2}{3}aR^3=\frac{1}{3}aR^3$ não é nulo.

d) Seria possível definir uma função potencial tal que este campo seria obtido do gradiente dessa função? Explique.

Não, porque este campo não é conservativo.



4) [2,0] Um fio isolante e fino, disposto ao longo do eixo x de $x=a$ até $x=b$, está uniformemente carregado com uma carga elétrica total Q.



a) Determine o potencial elétrico na origem O, tendo como referência um potencial nulo a grandes distâncias $(r \gg b)$.

$$V(0)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{dq}{x}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(a-b)}\int_a^b \frac{dx}{x}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(a-b)}\ln\frac{b}{a}$$

b) Explique como seria possível usar esse resultado para obter a energia de formação desse sistema de cargas elétricas, e se essa energia seria nula, finita ou infinita.

Com base no resultado anterior, o potencial de uma carga qualquer na extremidade de um segmento de reta uniformemente carregado deve ser infinito pois $\ln\frac{b}{a}\rightarrow\infty$, quando $a\rightarrow 0$, o mesmo acontecendo com cada ponto do segmento entre *a* e *b* pois cada ponto *x* nesse intervalo é a extremidade direita do segmento (*a*,*x*) e esquerda do segmento (*x*,*b*). Portanto para formar o sistema trazendo cargas infinitesimais do infinito para o segmento, a energia necessária

$U=\int_0^Q\int_a^b \frac{dq}{(a-b)}V(q,x)\,dx$ seria infinita, pois $V(q,x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(a-b)}\left[\ln\frac{(b-x)}{(x-x)}+\ln\frac{(x-a)}{(x-x)}\right]$ é infinito para qualquer ponto *x* do segmento (*a*,*b*), para qualquer valor *q* finito.

5) [2,0] A função potencial elétrico de um determinado sistema é dada pela expressão:

$$V(x,y,z)=\frac{V_0}{1+a(x^2+y^2+az^4)}$$

onde V_0 e a são constantes.

a) Determine o trabalho mínimo necessário para transportar uma carga de teste q "do infinito" até a origem.

$$W_{min}=q(V(0,0,0)-V(\infty))=q(V_0-0)=qV_0$$

b) Obtenha a expressão para o campo elétrico em todo o espaço, $\vec{E}(x,y,x)$.

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}V=-[\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}]$$

$$-\frac{\partial V}{\partial x}=V_0\frac{2ax}{(1+ax^2+ay^2+a^2z^4)^2}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial y}=V_0\frac{2ay}{(1+ax^2+ay^2+a^2z^4)^2}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial z}=V_0\frac{4a^2z^3}{(1+ax^2+ay^2+a^2z^4)^2}$$

$$\vec{E}(x,y,z)=\frac{V_0}{(1+ax^2+ay^2+a^2z^4)^2}(2ax\hat{i}+2ay\hat{j}+4a^2z^3\hat{k})$$

c) Determine o vetor campo elétrico no ponto $x=\frac{2}{\sqrt{a}},y=0,z=\frac{1}{\sqrt{a}}$. Qual é o ângulo de inclinação do vetor campo elétrico com relação ao eixo dos x?

$$\vec{E}(\frac{2}{\sqrt{a}},0,\frac{1}{\sqrt{a}})=\frac{V_0}{(1+4+0+1)^2}(4\sqrt{a}\hat{i}+4\sqrt{a}\hat{k})=\sqrt{a}\frac{V_0}{9}(\hat{i}+\hat{k})$$

O ângulo é de 45 graus $(\pi/4)$ pois a tangente obtida da razão entre as componentes é 1: $\frac{E_z}{E_x}=1$

d) Indique se esse campo é ou não conservativo e indique um argumento para isso.
Como o campo é obtido do gradiente de uma função potencial, ele é necessariamente conservativo.