MAT1351 - Cálculo para Funções de Uma Variável Real I

LISTA 3 PARA ENTREGAR

Instruções

1. Fazer em grupos de até 4 pessoas.
2. Prazo de entrega é até 26 de maio.
3. Escrever seus nomes completos com seu número usp nos trabalhos.
4. Enviar os trabalhos por e-Disciplinas em arquivos pdf.
5. Justifique todas as suas afirmações. Bom trabalho!

Questão 1 (3.0 pts) Se uma pedra for lançada para cima no planeta Marte com velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) após t segundos é dada por $H = 10t - 1,86t^2$.

(a) Encontre a velocidade da pedra após um segundo.

(b) Encontre a velocidade da pedra quando $t = a$.

(c) Quando a pedra atinge a superfície?

(d) Com que velocidade a pedra atinge a superfície?

Questão 2 (2.0 pts) Encontre uma equação para a reta normal à parábola $y = x^2 - 5x + 4$ que seja paralela à reta $x - 3y = 5$.

Questão 3 (3.0 pts) Calcule os seguintes limites

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{5x^3 - 4x}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)\sin(5x)}{x^2}$.

(c) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta + \tan\theta}$.

Questão 4 (2.0 pts) Encontre a derivada das funções.

(a) $y = \cos\left(\sqrt{\sin(\tan \pi x)}\right)$.

(b) $y = (x + (x + \sin^2 x)^3)^4$.

Q1 $H(t) = 10t - 1{,}86\,t^2$

(a) $H'(t) = 10 - 3{,}72\,t \Rightarrow v(1) = H'(1) = 10 - 3{,}72 = 6{,}28.$

A velocidade da pedra após de um segundo é $6{,}28$ m/s.

(b) Como $H'(t) = 10 - 3{,}72t$

para $t = a$ temos $H'(a) = 10 - 3{,}72a.$

(c) A pedra atinge a superfície quando $H(t) = 0.$

$$H(t) = 0 \Leftrightarrow 10t - 1{,}86t^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow t\,(10 - 1{,}86t) = 0$$
$$\Leftrightarrow t = 0 \quad \text{ou} \quad t = \frac{10}{1{,}86} = 5{,}38$$

Portanto atinge a superfície quando $t = 5{,}38$ seg.

(d) fazemos

$$v\left(\frac{10}{1{,}86}\right) = H'\left(\frac{10}{1{,}86}\right) = 10 - 3{,}72\left(\frac{10}{1{,}86}\right) = -10 \text{ m/s}.$$

Q2 A inclinação de $y = x^2 - 5x + 4$ é dado por

$$m = y' = 2x - 5.$$

Observamos

$$x - 3y = 5 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(x - 5)$$

então a inclinação desta reta é $1/3$, logo a reta normal desejada deve ter inclinação $1/3$, portanto, a reta tangente à parábola deve ter inclinação -3. Acontece se

$$2x - 5 = -3 \Rightarrow x = 1$$

Se $x = 1 \Rightarrow y = 1^2 - 5.(1) + 4 = 0$

Portanto, a equação da reta normal é:

$$\ell_N : y - y_0 = \frac{1}{3}(x - x_0) \Leftrightarrow y - 0 = \frac{1}{3}(x - 1)$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}.$$

Q3 (a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{5x^3-4x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\cdot\frac{3}{(5x^2-4)}\right)$$

$$= \lim_{3x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3}{5x^2-4} = 1\cdot\left(\frac{3}{-4}\right) = \frac{-3}{4}.$$

(b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x\ \operatorname{sen} 5x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(3.\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\cdot\frac{5\operatorname{sen} 5x}{5x}\right)$$

$$= 3.\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\cdot 5\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} = 15.$$

(c) $$\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta+\tan\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}}{\frac{\theta+\tan\theta}{\theta}} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}}{1+\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}}.$$

$$= \frac{\lim_{\theta\to 1}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}}{1+\underbrace{\lim_{\theta\to 1}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}}_{1}\cdot\underbrace{\lim_{\theta\to 1}\frac{1}{\cos\theta}}_{1}} = \frac{1}{1+1.1} = \frac{1}{2}.$$

Q4 (a) $$y = \cos\left(\sqrt{\operatorname{sen}(\tan\pi x)}\right) = \cos\left(\operatorname{sen}(\tan\pi x)\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow y' = -\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}(\tan\pi x)\right)^{1/2}.\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}(\tan\pi x)\right)^{1/2}$$

$$= -\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}(\tan\pi x)\right)^{1/2}.\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(\tan\pi x)\right)^{-1/2}.\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}(\tan\pi x)\right)$$

$$= \frac{-1}{2}\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{\operatorname{sen}(\tan\pi x)}\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}(\tan\pi x)}}\cdot\cos(\tan\pi x).\frac{d}{dx}(\tan\pi x).$$

$$= \frac{-1}{2}\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{\operatorname{sen}(\tan\pi x)}\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}(\tan\pi x)}}\cdot\cos(\tan\pi x).\sec^2(\pi x).\pi.$$

$$= \frac{-\pi}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{\operatorname{sen}(\tan \pi x)}\right) \cdot \cos(\tan \pi x) \cdot \sec^2(\pi x)}{\sqrt{\operatorname{sen}(\tan \pi x)}} .$$

(b) $y = \left(x + (x + \operatorname{sen}^2 x)^3\right)^4$

$$\Rightarrow y' = 4 \cdot \left(x + (x + \operatorname{sen}^2 x)^3\right)^3 \cdot \left(1 + 3(x + \operatorname{sen}^2 x)^2 \cdot (1 + 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x)\right)$$