

Polinômios de Taylor

Aula 22

Primeiro Semestre de 2023

Os polinômios são as funções mais simples de manipular, já que os seus valores podem ser obtidos através de operações simples (adição e multiplicação). Parece natural, portanto, buscar aproximar funções mais complicadas por funções polinomiais.

Nesta aula, vamos discutir a **Fórmula de Taylor** que fornece uma regra para determinar o polinômio de grau n que 'melhor aproxima' uma função dada ao redor de um ponto p .

Antes de tratarmos o caso geral, discutimos alguns casos particulares para melhor entender o procedimento.

Suponha que a função f seja diferenciável em um intervalo aberto (a, b) e seja $p \in (a, b)$.

Neste caso, vamos procurar uma reta (polinômio de grau até 1) que 'melhor aproxima' a função f ao redor do ponto p . Isto é, vamos encontrar a reta

$$L(x) = m + n(x - p)$$

que 'melhor aproxima' a função f para x próximo a p .

A estratégia é encontrar m e n de modo que, em intervalos da forma $(p - \delta, p + \delta)$, com δ arbitrariamente pequeno, a função L escolhida seja aquela que 'melhor aproxima' f .

Definimos o erro que se comete ao aproximar $f(x)$ por $L(x)$ por

$$E(x) = f(x) - L(x) = f(x) - m - n(x - p).$$

Chamamos de 'melhor aproximação' aquela para a qual $E(p) = 0$ e $E(x)$ é pequeno quando comparado com $|x - p|$, isto é,

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{E(x)}{x - p} = 0.$$

Note que, $E(p) = 0$ implica que $m = f(p)$ e para $x \neq p$, temos

$$\frac{E(x)}{x - p} = \frac{f(x) - f(p)}{x - p} - n.$$

Daí,

$$0 = \lim_{x \rightarrow p} \frac{E(x)}{x - p} = f'(p) - n \text{ e } n = f'(p)$$

e, nossa definição de melhor aproximação, determina a escolha de

$$m = f(p) \text{ e } n = f'(p).$$

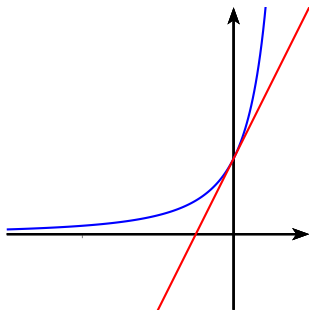
Definimos o **Polinômio de Taylor de Ordem 1 de $f(x)$ ao redor de p** por

$$P_1(x) = f(p) + f'(p)(x - p).$$

P_1 é a reta que melhor aproxima f ao redor de p . Note ainda que o gráfico de P_1 é a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$.

Exemplo

O Polinômio de Taylor de Ordem 1 da função $f(x) = (1-x)^{-2}$ ao redor do ponto zero é $P_1(x) = 1 + 2x$.



Suponhamos agora que a função $f(x)$ seja duas vezes diferenciável e procuremos um polinômio $P(x)$, de grau no máximo 2, que 'melhor aproxime' f , ou seja, se $E(x) = f(x) - P(x)$, então

$$E(p) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow p} \frac{E(x)}{x - p} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow p} \frac{E(x)}{(x - p)^2} = 0.$$

É claro que a última condição expressa que o erro cometido é pequeno quando comparado com $(x - p)^2$ e implica a penúltima.

Assim, devemos procurar $P(x) = c_0 + c_1(x - p) + c_2(x - p)^2$, com os coeficientes a serem determinados pelas condições acima.

Agora, $E(p) = 0$ implica que $c_0 = f(p)$ e $\lim_{x \rightarrow p} \frac{E(x)}{x-p} = 0$ implica que

$$0 = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p) - c_1(x-p) - c_2(x-p)^2}{x-p} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x-p} - c_1 = f'(p) - c_1.$$

Por fim, $\lim_{x \rightarrow p} \frac{E(x)}{(x-p)^2} = 0$ implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p) - f'(p)(x-p) - c_2(x-p)^2}{(x-p)^2} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p) - f'(p)(x-p)}{(x-p)^2} - c_2 \\ &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x) - f'(p)}{2(x-p)} - c_2 = \frac{1}{2}f''(p) - c_2, \text{ e } c_2 = \frac{1}{2}f''(p) \end{aligned}$$

Concluimos, portanto, que

$$P(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2}(x-p)^2.$$

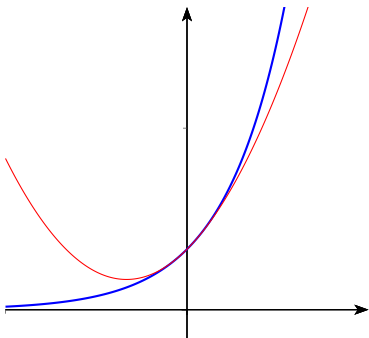
O Polinômio de Taylor de Ordem 2 de $f(x)$ ao redor de p é

$$P_2(x) = f(p) + f'(p)(x - p) + \frac{f''(p)}{2}(x - p)^2.$$

P_2 é o polinômio de grau no máximo 2 que 'melhor aproxima' f ao redor de p .

Exemplo

O Polinômio de Taylor de Ordem 2 da função $f(x) = e^x$ ao redor do ponto zero é $P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.



De forma geral, se a função dada $f(x)$ for derivável até ordem n e procuramos um polinômio $P_n(x)$ de grau no máximo n que 'melhor aproxima' f ao redor de p , isto é, tal que

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{E_n(x)}{(x-p)^n} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-p)^n} = 0.$$

Procedendo como antes, concluímos que $P_n(x)$ terá a forma

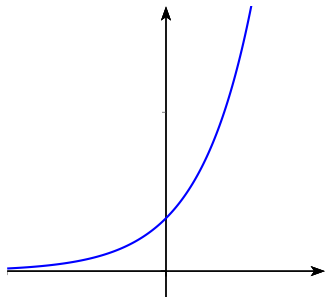
$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2}(x-p)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n, \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(p)}{j!}(x-p)^j \end{aligned}$$

o qual é chamado de **Polinômio de Taylor de Ordem n de $f(x)$ ao redor de p** .

Exemplo

O Polinômio de Taylor de Ordem 4 ao redor do zero da função

$$f(x) = e^x \text{ é } P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}.$$



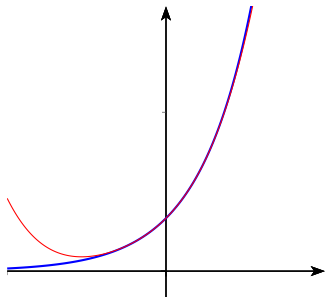
O Polinômio de Taylor de Ordem 6 ao redor do zero da função

$$f(x) = e^x \text{ é } P_6(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6$$

Exemplo

O Polinômio de Taylor de Ordem 4 ao redor do zero da função

$$f(x) = e^x \text{ é } P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}.$$



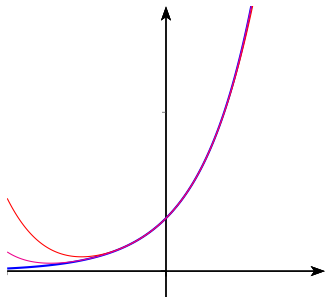
O Polinômio de Taylor de Ordem 6 ao redor do zero da função

$$f(x) = e^x \text{ é } P_6(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6$$

Exemplo

O Polinômio de Taylor de Ordem 4 ao redor do zero da função

$$f(x) = e^x \text{ é } P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}.$$



O Polinômio de Taylor de Ordem 6 ao redor do zero da função

$$f(x) = e^x \text{ é } P_6(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6$$

Para avaliarmos a precisão com que uma função é aproximada por polinômios de Taylor, vamos definir o erro por

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x),$$

onde $f(x)$ é a função dada e $P_n(x)$ é o polinômio de Taylor de ordem n de f ao redor de p .

O teorema a seguir nos fornece uma fórmula para o erro.

Teorema (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange)

Suponhamos que a função f seja $(n + 1)$ vezes diferenciável em um intervalo aberto I e sejam $a, b \in I$. Então

$$f(b) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (b-a)^j + E_n$$

onde

$$E_n = \frac{f^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

para algum c entre a e b .

De fato: Para $a < b$ defina

$$E_n = f(b) - P_n(b) = f(b) - \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (b-a)^j$$

e, para $x \in [a, b]$,

$$\phi(x) = f(b) - f(x) - \sum_{j=1}^n \frac{f^{(j)}(x)}{j!} (b-x)^j - E_n \frac{(b-x)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}}. \text{ Logo,}$$

$$\phi'(x) = -\sum_{j=1}^n \frac{f^{(j+1)}(x)}{j!} (b-x)^j + \sum_{j=2}^n \frac{f^{(j)}(x)}{(j-1)!} (b-x)^{j-1} + (n+1) E_n \frac{(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}}$$

Como ϕ é contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e $\phi(a) = \phi(b) = 0$, do teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $\phi'(c) = 0$. Agora,

$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= -\sum_{j=1}^n \frac{f^{(j+1)}(x)}{j!} (b-x)^j + \sum_{j=2}^n \frac{f^{(j)}(x)}{(j-1)!} (b-x)^{j-1} + (n+1)E_n \frac{(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}} \\
&= -\sum_{j=1}^n \frac{f^{(j+1)}(x)}{j!} (b-x)^j + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f^{(j+1)}(x)}{j!} (b-x)^j + (n+1)E_n \frac{(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}} \\
&= -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n + (n+1)E_n \frac{(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}} \\
&= \left[-\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} + E_n \right] \frac{(n+1)(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

e, como $\phi'(c) = 0$, E_n tem a expressão desejada. O caso $b < a$ é idêntico. \square

Exemplo

Utilizando Polinômio de Taylor de Ordem 2, calcule um valor aproximado para $\ln(1,03)$ e avalie o erro.

Solução: O Polinômio de Taylor de Ordem 2 de $f(x) = \ln(x)$ em torno de $p = 1$ é

$$P_2(x) = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2.$$

Logo, $P_2(1,03) = 0,02955$ é uma aproximação para $\ln(1,03)$.

Avaliemos o erro. Como $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$, temos $|f'''(x)| \leq 2$, para $x \geq 1$. Da fórmula do erro,

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{2}{3!}|x - 1|^3, \quad x \geq 1.$$

Segue que, para $x = 1,03$ o erro cometido na aproximação é

$$|f(1,03) - P_2(1,03)| \leq \frac{1}{3}(0,03)^3 = 9(10)^{-6} < 10^{-5}.$$

Exemplo

O Polinômio de Taylor de Ordem n ao redor do zero de $f(x) = e^x$ é

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

Solução: Recorde que

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Como $f^{(n)}(x) = e^x$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e para todo $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(0) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Logo a expressão de $P_n(x)$ é a expressão dada acima.

Exemplo

Calcule um valor aproximado para o número e e avalie o erro.

Solução: Observe que para $x \in [0, 1]$, $0 \leq e^x = f^{(n+1)}(x) \leq e < 3$.
Pelo Teorema anterior, o erro é dado por

$$\begin{aligned} |e^1 - P_n(1)| &= \left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right| \\ &= |E_n(1)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \right| \end{aligned}$$

para algum $c \in [0, 1]$. Logo,

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right| \leq \frac{3}{(n+1)!}.$$

Exemplo

Avalie e com um erro inferior a 10^{-5} .

Solução: Queremos que $|E_n(1)| < 10^{-5}$. Logo basta tomar n tal

que $\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-5}$, ou seja, tal que $(n+1)! > 3(10^5)$. Por tentativas, chega-se a $n = 8$.

Exercício: Calcule um valor aproximado para $\sqrt[3]{7,9}$ e avalie o erro.