## PROVA 1 - TÓPICOS DE MATEMÁTICA APLICADA - MAP 2313

A prova é individual. Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

**Boa Prova!**

**Exercício 1.** (1 ponto) a) Calcule a série de Fourier da função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(\theta) = |\theta|$ na forma real ou complexa. (cuidado ao calcular o termo $n = 0$).

(1,5 ponto) b) Ache uma série para $\pi^2$ e $\pi^4$, usando a série que você obteve acima. Para tanto, observe que $f(0) = 0$ e que a fórmula de Parseval é válida.

**Exercício 2.** Considere o seguinte problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), && t > 0 \text{ e } x \in [0,\pi], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = -1,\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,\pi) &= -1, && t > 0, \\ u(0,x) &= 0, && x \in [0,\pi]. \end{aligned}$$

(1 ponto) a) Mostre que podemos encontrar $w(x)$ tal que $u(t,x) = v(t,x) + w(x)$, em que $v$ resolve a equação do calor com condições de Neumann $\frac{\partial v}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial v}{\partial x}(t,\pi) = 0$. Qual é a condição inicial de $v$? (Dica: Ache $w$ tal que $\frac{dw}{dx}(0) = \frac{dw}{dx}(\pi) = -1$)

(1,5 ponto) b) Ache $v$ usando o método de separação de variáveis e determine $u$.

**Exercício 3.** Dado uma função $u_0 : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ contínua, considere o problema abaixo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), && t > 0 \text{ e } x \in [0,\pi], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0,\ u(t,\pi) &= 0, && t > 0, \\ u(0,x) &= u_0(x), && x \in [0,\pi]. \end{aligned}$$

(2 pontos) a) Mostre que se existir uma solução desse problema, ela é única. (Dica: Se $u_1$ e $u_2$ forem soluções do problema, defina $w = u_1 - u_2$. Use a função $E(t) = \int_0^\pi w(t,x)^2 dx$ para mostrar que $u_1 = u_2$. Observe que $w$ resolve a equação do calor com as mesmas condições de contorno, mas com condição inicial nula).

(1 ponto) b) Procure uma solução do tipo $T(t)X(x)$ para a equação do calor com as condições de contorno acima. Mostre que $X$ é solução de um problema de Sturm-Liouville. Calcule os autovalores e as autofunções deste problema.

**Exercício 4.** (2 pontos) Considere a seguinte equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + t, && t > 0 \text{ e } x \in [0,\pi], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,\pi) &= 0, && t > 0, \\ u(0,x) &= \cos(x), && x \in [0,\pi], \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= 0, && x \in [0,\pi]. \end{aligned}$$

Vimos em sala de aula que podemos resolver esse problema procurando uma solução do tipo $u(t,x) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\cos(nx)$. Determine os coeficientes $a_n$ e a solução $u$.

(Dica: Seja $F(t,x) = t$. Escreva $F(t,x) = \frac{F_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)\cos(nx)$. Note que $F_0(t) = 2t$ e $F_n(t) = 0$ se $n \geq 1$).

## Formulário

**Proposição 5.** *Seja $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ uma função $C^1$ por partes e contínua. Logo para todo ponto $\theta \in ]-\pi, \pi[$, temos*

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n cos(n\theta) + b_n sen(n\theta)\right),$$

*em que $c_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta$, para $n \in \mathbb{Z}$, $a_0 := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta$, $a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)cos(n\theta)d\theta$ e $b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)sen(n\theta)d\theta$ para $n \geq 1$.*

**Proposição 6.** *Seja $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ uma função contínua por partes. Logo a igualdade de Parseval é válida:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{\pi}{2}|a_0|^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right).$$

**Proposição 7.** *Seja $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1$. Então para todo ponto $\theta \in ]0, \pi[$, temos*

*1) Expansão em série de Fourier cosseno*

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta),$$

*em que*

$$a_0 := \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)d\theta \text{ e } a_n := \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)d\theta,\ n \geq 1.$$

*2) Expansão em série de Fourier seno*

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(n\theta),$$

*em que*

$$b_n := \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)sen(n\theta)d\theta,\ n \geq 1.$$