Guia para Física Experimental
Caderno de Laboratório, Gráficos e Erros
Instituto de Física, Unicamp

Preparado por

Prof. Dr. Carlos Henrique de Brito Cruz

Prof. Dr. Hugo Luis Fragnito

Estagiário de Capacitação Docente Ivan Ferreira da Costa

Estagiário de Capacitação Docente Bernardo de Assunção Mello

(Versão 1.1, revista por CHBC e HLF em Setembro de 1997)

IFGW, Unicamp

1997

O truque conceptual que utilizamos para justificarmos o procedimento é supor que os x_i foram medidos sem erro e atribuímos um valor de erro maior para os y_i.

O caso em que os y_i têm diferentes desvios padrões (mas ainda os x_i medidos sem erro) se trata como segue: se Δy_i é o desvio padrão de y_i, primeiro se definem pesos normalizados[5] para cada ponto $w_i = (1/\Delta y_i^2)/\Sigma(1/\Delta y_j^2)$ (de modo que, por exemplo, $\overline{x} = \Sigma w_i x_i$ e $\overline{y} = \Sigma w_i y_i$) e se minimiza a função $f(a,b) = \Sigma w_i\left(y_i - ax_i - b\right)^2$. Os resultados são dados pelas mesmas fórmulas da Tabela 2.1 mas onde, em cada termo de soma, se multiplica por w_i. Por exemplo, $S^2 = \Sigma w_i (y_i - ax_i - b)^2/(N-2)$ (que não é mais um estimador da variância, já que σ_i^2 é diferente para cada y_i), $a = \Sigma w_i (x_i - \overline{x}) y_i / \Sigma w_i (x_i - \overline{x})^2$, $\Delta a = S/\sqrt{\Sigma w_i (x_i - \overline{x})^2}$, etc.

As fórmulas de ajuste de uma lei física linear apresentadas na Tabela 2.1 se aplicam a medições de uma grandeza y realizadas em idênticas condições (por tanto, sobre o mesmo objeto) exceto pela variável x. Algumas dessas fórmulas não se aplicam se as medidas são efetuadas em diferentes objetos. Por exemplo, a relação entre peso e altura de pessoas é aproximadamente linear mas não é exatamente uma lei física e, dado que cada ponto no gráfico corresponde a um objeto diferente, as fórmulas da Tabela 2.1 não se aplicam a este caso (as fórmulas correspondentes para estimar os coeficientes da reta e seus desvios podem ser vistas na ref. 1). Os puristas distinguem este último caso com o termo "regressão linear" (em inglês[6] "*linear regression*"), em vez de "ajuste linear" ("*linear fitting*"), reservada para uma lei física linear.

2.3.2 Método gráfico

Descrevemos a seguir um método rápido para estimar os parâmetros de uma reta, aconselhável quando não dispõe de um computador com software adequado para cálculos estatísticos (como, por exemplo, nas provas!). As únicas ferramentas necessárias são um lápis (ou caneta) e uma régua (de preferência transparente).

O método funciona melhor se as escalas do gráfico foram escolhidas decentemente, ou seja com os pontos experimentais relativamente alinhados ao longo de uma diagonal.

[5] O peso *normalizado* é tal que $\Sigma w_i = 1$.

[6] Quando não obvia a sua tradução, daremos também o nome em inglês entre parênteses e aspas. Isto pode ser útil par o aluno já que a imensa maioria dos livros - e da literatura científica em geral - bem como os softwares modernos de tratamento estatístico de dados estão nessa língua.

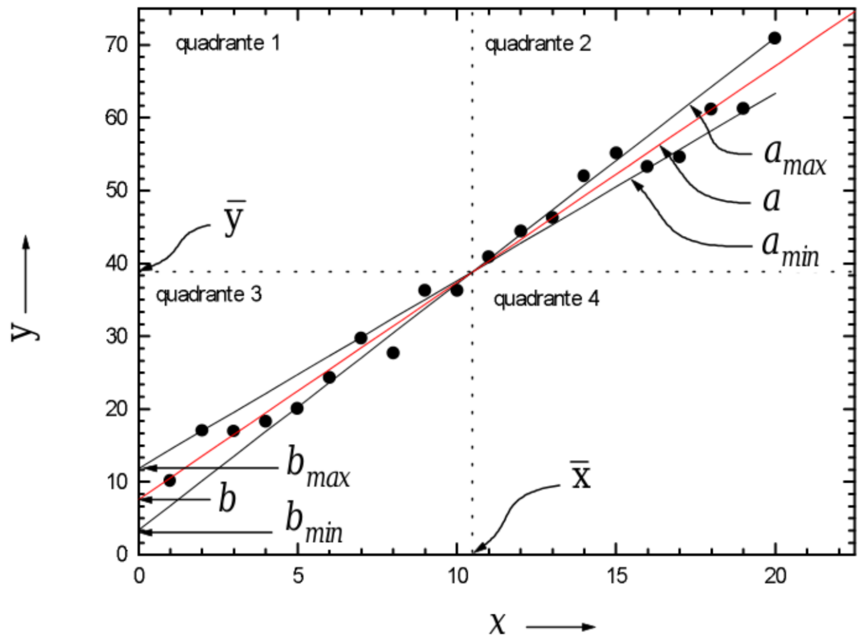

Fig. 2.2. *Método gráfico para determinar os coeficientes da reta e seus desvios. As barras de erro são menores que o tamanho do símbolo de cada ponto experimental.*

Para ilustrar o método vamos considerar os dados representados na Figura 2.1. Para simplificar as coisas nos limitaremos ao caso em que todos os pontos tem o mesmo peso. Siga os passos abaixo.

1. Estime o centro de gravidade dos pontos $(\bar{x}, \bar{y})$. As retas vertical e horizontal que passam por este ponto divide o gráfico em quatro quadrantes. No exemplo da figura 1 os dados estão, aproximadamente, metade no quadrante 3 e metade no quadrante 2.

2. Coloque a ponta do lápis no ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ e apoie a régua no lápis.

3. Gire a régua em torno do ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ até que 50% dos pontos **de cada quadrante** estejam por cima, e 50% por abaixo da régua. (Note que mais de uma reta satisfazem esta condição e você deve escolher uma média.) Trace a **reta média**. A equação desta reta será $y = ax + b$.

4. Apoie novamente a régua no lápis e gire-a em torno do ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ até deixar, aproximadamente, 16% dos pontos de cada quadrante abaixo e 84 % acima da régua. A equação desta reta é $y = \bar{y} + a_{min}(x - \bar{x})$. A inclinação desta reta representa a **inclinação mínima**, a_{min}, dentro de um desvio padrão. Prolongando esta reta até cortar o eixo $x = 0$, o ponto de interseção determina b_{max}.

5. Agora gire a régua, sempre em torno do ponto $(\bar{x}, \bar{y})$, de modo de deixar 16 % dos pontos de cada quadrante acima e 84 % abaixo. A equação desta reta é $y = \bar{y} + a_{max}(x - \bar{x})$. Esta reta determina a inclinação máxima, a_{max}, e a sua prolongação até $x = 0$, b_{min}.

Note que na região delimitada pelas retas de inclinação máxima e mínima ficam aproximadamente 68 % dos pontos experimentais, que é consistente com o conceito de desvio padrão para uma distribuição normal. Se a sua apreciação foi correta, a reta média (item 3) deve ficar no meio das retas com inclinações mínima e máxima traçadas nos ítens 4 e 5. Para determinar os valores de a e b, assim como os erros padrões nestes parâmetros utilize as equações:

$$a = \frac{1}{2}(a_{max} + a_{min})\ ,\ b = \frac{1}{2}(b_{max} + b_{min})\ ,$$

$$\Delta\overline{a} = \frac{1}{2\sqrt{N}}\left|a_{max} - a_{min}\right| \text{ e } \Delta\overline{b} = \frac{1}{2\sqrt{N}}\left|b_{max} - b_{min}\right|.$$

O método é relativamente subjetivo pois depende da sua apreciação mas, com um pouco de prática, você obterá excelentes resultados.

Se os pontos têm pesos diferentes, siga o mesmo procedimento descrito mas levando em consideração os pesos relativos de cada ponto. O peso de cada ponto deve ser aproximadamente proporcional à inversa da barra de erro.