MAT0264 - Anéis e Corpos
Lista 4 - 2023

1. Seja R um domínio de integridade e K seu corpo de frações. Seja P um ideal primo de R e defina
$$R_P = \left\{ \frac{a}{b} \in K \mid b \notin P \right\}.$$
   (a) Prove que R_P é um subanel de K.
   (b) Mostre que R_P tem um único ideal maximal. Determine esse ideal.
   (c) Mostre que o anel quociente de R_P por seu único ideal maximal é isomorfo ao corpo de frações do anel quociente R/P de R por P.

2. Seja R um anel comutativo com unidade e seja $R[X]$ o anel de polinômios com coeficientes em R e na indeterminada X.
   (a) Mostre que $U(R) \subset U(R[x])$.
   (b) Mostre que se R é um domínio de integridade então $U(R) = U(R[X])$.
   (c) Mostre que o polinômio $f(X) = \overline{2}X^3 + \overline{2}x^2 + \overline{2}X + \overline{1} \in U(\mathbb{Z}_4[X])$.

3. Seja D um domínio de integridade e seja K seu corpo de frações. Mostre que o corpo de frações de $D[X]$ é isomorfo ao corpo de frações $K(X)$ de $K[X]$.

4. Seja $0 < m \in \mathbb{Z}$ e $\varphi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}_m[X]$ a função definida por
$$f(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i) = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i} X^i.$$
   (a) Mostre que φ é um homomorfismo de anéis.
   (b) Determine Kerφ.
   (c) O que você conclui usando o Teorema do Homomorfismo?

5. Seja S um anel comutativo com unidade e R subanel de S com unidade $1_R = 1_S$. Seja $s \in S$ e defina
$$\varphi_s : R[X] \to S \quad \text{por} \quad \varphi_s(f(X)) = f(s) \ \text{ para todo } \ f(X) \in R[X]$$
(isto é, se $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$, então $\varphi_s(f(X)) = a_0 + a_1s + \cdots a_ns^n$). Prove que φ_s é homomorfismo de anéis tal que $\varphi_s(r) = r$ para todo $r \in R$ e $\varphi_s(X) = s$.

6. Sejam R e S anéis comutativos com 1 e $\varphi : R \to S$ um homomorfismo de anéis com $\varphi(1_R) = 1_S$. Seja $s_0 \in S$. Mostre que existe um único homorfismo $\bar{\varphi} : R[X] \to S$ tal que $\bar{\varphi}(a) = \varphi(a)$ para todo $a \in R$ e $\bar{\varphi}(X) = s_0$.

7. Prove que:
   (a) $\mathbb{R}[X]/\langle X^2 + 1\rangle \cong \mathbb{C}$;
   (b) $\mathbb{Z}[X]/\langle X^2 + 1\rangle \cong \mathbb{Z}[i]$.

8. Seja R um anel comutativo com 1. Prove que o ideal $\langle X \rangle$ é um ideal primo de $R[X]$ se, e somente se, R é domínio de integridade.

9. Seja R um anel comutativo com unidade e seja $R[X]$ o anel de polinômios com coeficientes em R. prove que:

   (a) Um polinômio $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ é nilpotente, se, e somente se, $a_0, a_1, a_2 \cdots a_n$ são elementos nilpotentes em R.

   (b) Um polinômio $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in U(R[X])$ se, e somente se, $a_0 \in U(R)$ e $a_1, a_2 \cdots a_n$ são elementos nilpotentes em R.

   (c) Suponha que o anel R não tem elementos nilpotentes não nulos. Mostre que $0 \neq f$ é um divisor do zero em $R[X]$ se, e somente se, existe $a \in R, a \neq 0$ tal que $af(X) = 0$.

   (d) Provar o item (c) sem a hipótese de que R não tem elementos nilpotentes não nulos.

   Observação: O item (d) é um exercício do livro do Herstein com (*) , deve ser difícil!

   Dica: Prove que se $u \in U(R)$ e $x \in R$ é nilpotente então $u - x$ é inversível.