

Álgebra Linear e Aplicações

- *Existência e unicidade dos determinantes.*
- *Fórmula de cofatores e fórmula com permutações.*



DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA FUNDAMENTAL

TEOREMA: (FUNDAMENTAL) DADO $n \in \mathbb{N}$, EXISTE UMA ÚNICA FUNÇÃO DETERMINANTE $\det: M_{n,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

EXISTÊNCIA: PROVAREMOS POR INDUÇÃO.

PARA $n=1$ E $n=2$ JÁ VIMOS QUE EXISTE UMA FUNÇÃO DETERMINANTE:

$$\bullet \det([a_n]) = a_{11}$$

$$\bullet \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

VAMOS PROVAR QUE SE EXISTE UMA FUNÇÃO DETERMINANTE EM $M_{n-1,n-1}(\mathbb{R})$, ENTÃO EXISTE EM $M_{n,n}(\mathbb{R})$:

DADO $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, DEFINIMOS $A(i,j) \in M_{n-1,n-1}(\mathbb{R})$ A MATRIZ A SEM A LINHA i E A COLUMNA j .

EXEMPLO: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow A(2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, A(3,1) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \dots$

FIXEMOS $j \in \{1, \dots, n\}$ E DEFINIMOS $E_j(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} A_{ij} \det A(i,j)$. LOGO

i) SE $A=I$, ENTÃO $A_{ij} = \delta_{ij}$. LOGO $E_j(I) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \delta_{ij} \det I(i,j) = (-1)^{jj} \det(I(j,j)) = 1$, pois $I(j,j)$ É A IDENTIDADE $(n-1) \times (n-1)$

$$\left(\text{SE } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ ENTÃO } I(2,2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

ii) Se A tem linhas k e l iguais, então $A(i|j)$ tem duas linhas iguais se $i \notin \{k, l\}$.
 Logo $\det(A(i|j)) = 0$ se $i \notin \{k, l\}$. Assim,

$$E_j(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} A_{ij} \det(A(i|j)) = (-1)^{k+j} A_{kj} \det(A(k|j)) + (-1)^{l+j} A_{lj} \det(A(l|j))$$

$$= (-1)^{k+j} A_{kj} \left(\det(A(k|j)) + (-1)^{l-k} \det(A(l|j)) \right)$$

$\hookrightarrow$ pois $A_{kj} = A_{lj}$, já que as linhas k e l coincidem

OBSERVAMOS QUE $A(k|j)$ PODE SER TRANSFORMADO EM $A(l|j)$ ATRAVÉS DE $l-k-1$ PERMUTAÇÕES

EXEMPLO: $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{bmatrix}$. Logo $A(2|5) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix}$

LINHA 2

"
LINHA 5

$$A(5|5) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$$

BASTAM $5-2-1=2$
TROCAS

$$\text{Logo } E_j(A) = (-1)^{k+j} A_{kj} \left(\det(A(k|j)) + (-1)^{l-k} (-1)^{l-k-1} \det(A(l|j)) \right) \\ = (-1)^{k+j} A_{kj} \left(\det(A(k|j)) - \det(A(l|j)) \right) = 0.$$

iii) E_j É MULTILINEAR, POIS $A \mapsto \det(A(i|j))$ É MULTILINEAR NAS LINHAS $\neq i$
 $A \mapsto A_{ij}$ É LINEAR NA LINHA i

Assim, $A \mapsto A_{ij} \det(A(i|j))$ É MULTILINEAR EM TODAS AS LINHAS.

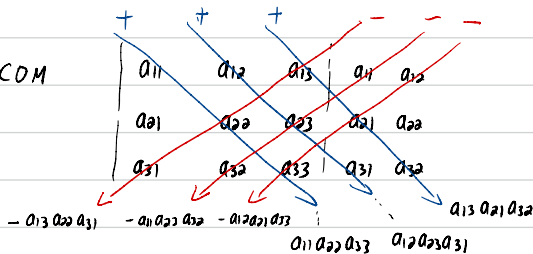
$\Rightarrow A \mapsto \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} A_{ij} \det(A(i|j))$ É MULTILINEAR EM TODAS AS LINHAS

Por i), ii) e iii), CONCLUÍMOS QUE E_j É UMA FUNÇÃO DETERMINANTE EM $M_{n,n}(\mathbb{R})$

EXEMPLO: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ $E_1(A) = a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{21} \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{31} \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{21} a_{12} a_{33} + a_{21} a_{13} a_{32} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{13} a_{22}$$

ISTO COINCIDE COM



EXERCÍCIO: MOSTRE QUE $E_2(A) = E_3(A) = E_1(A)$.

EXEMPLO: SEJA $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. CALCULE $\det(A)$.

SOLUÇÃO: $\det(A) = E_1(A) = 1 \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$$= 1 \times 0 - 3 \times (-1) - 1 \times 4 = -1$$

UNICIDADE:

DEMO 1: SEJAM $\det_1: M_{n,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ E $\det_2: M_{n,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ DUAS FUNÇÕES DETERMINANTES E $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$.

• SE $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ É SINGULAR (SINGULAR = NÃO INVERSÍVEL), ENTÃO $\det_1(A) = 0 = \det_2(A)$.

• SE $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ É INVERSÍVEL, ENTÃO PODEMOS ESCALONAR A COM $k \geq 0$ TROCA LINHAS E OBTEN

$$A \sim \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}. \text{ Logo } \det_1(A) = (-1)^k u_{11} \dots u_{nn} = \det_2(A).$$

ASSIM, DE QUALQUER FORMA $\det_1(A) = \det_2(A)$ ■

DEMO 2: SEJA $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ A BASE CANÔNICA DE $\mathbb{R}^n$. LOGO

$$\det(A) = \det\left(\sum_{j=1}^n A_{1j} e_j, \dots, \sum_{j=1}^n A_{nj} e_j\right) = \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_n=1}^n A_{1j_1} \dots A_{nj_n} \det(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}).$$

OBSERVE QUE $\det(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) = 0$ SE $j_i = j_k$ PARA $i \neq k$. ASSIM, BASTA CONSIDERAR OS CASOS EM QUE $j_1, \dots, j_n$ SÃO TODOS DISTINTOS. ISTO NOS LEVA AO CONCEITO DE PERMUTAÇÃO.

DEFINIÇÃO: UMA PERMUTAÇÃO DE UM CONJUNTO S É UMA FUNÇÃO BIJETORA $\sigma: S \rightarrow S$. O CONJUNTO DE TODAS AS PERMUTAÇÕES DE $S = \{1, \dots, n\}$ É DENOTADO POR S_n .

EXEMPLO: SEJA $\sigma \in S_3$ DADO POR $\sigma(1)=3, \sigma(2)=1, \sigma(3)=2$. LOGO, PODEMOS REPRESENTAR A PERMUTACÃO σ POR $(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)) = (3, 1, 2)$.

EM GERAL, $\sigma \in S_n$ É REPRESENTADO POR $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$. ESCRREVEMOS $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$.

SE $j_1, \dots, j_n$ SÃO TODOS DISTINTOS, A FUNÇÃO $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ DADA POR $\sigma(i) = j_i$ É UMA PERMUTACÃO. DESTA MANEIRA,

$$\det(A) = \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_n=1}^n A_{1j_1} \dots A_{nj_n} \det(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) = \sum_{\sigma \in S_n} A_{1\sigma(1)} \dots A_{n\sigma(n)} \det(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}).$$

PARA ANALISAR $\det(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$, VAMOS DEFINIR PERMUTAÇÕES ELEMENTARES.

DEFINIÇÃO: UMA PERMUTACÃO $\sigma \in S_n$ É CHAMADA DE ELEMENTAR SE $\exists j, k \in \{1, \dots, n\}, j \neq k$, TAIS QUE $\sigma(i) = i, \forall i \neq j, k, \sigma(j) = k$ E $\sigma(k) = j$. (ISTO É, SÓ TROCA j COM k). NOTE QUE $\sigma^{-1} = \sigma$ SE σ É ELEMENTAR.

PROPOSIÇÃO: SEJA $\sigma \in S_n$. LOGO $\exists$ PERMUTAÇÕES ELEMENTARES σ_i TAIS QUE $\sigma = \sigma_m \circ \dots \circ \sigma_1$. SE $\tilde{\sigma}_j$ SÃO ^{OUTRAS} PERMUTAÇÕES ELEMENTARES TAIS QUE $\sigma = \tilde{\sigma}_m \circ \dots \circ \tilde{\sigma}_1$, ENTÃO $(-1)^m = (-1)^{\tilde{m}}$, OU SEJA, m E $\tilde{m}$ SÃO AMBOS PARES OU ÍMPARES.

DEMO: SEJA $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ (σ É A FUNÇÃO COM A IMAGEM MOSTRADA AO LADO).

SEJA j TAL QUE $\sigma(j) = 1$ E σ_1 QUE TROCA 1 POR j . LOGO $\sigma_1 \circ \sigma = (1, \sigma(2), \dots, \sigma(j-1), \sigma(j), \sigma(j+1), \dots, \sigma(n))$.

SEJA k TAL QUE $\sigma_1 \circ \sigma(k) = 2$ E σ_2 QUE TROCA 2 POR k . LOGO $\sigma_2 \circ \sigma_1 \circ \sigma = (1, 2, \sigma_1 \circ \sigma(k), \dots, \sigma_1 \circ \sigma(j), \dots, \sigma(n))$.

REPETINDO, TEMOS $\sigma_{n-1} \circ \sigma_{n-2} \circ \dots \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 \circ \sigma = (1, 2, \dots, n) = \text{id}$ ($\text{id} = \text{IDENTIDADE}$. $\text{id}(j) = j$)

PORTANTO, $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_{n-1} \circ \text{id} = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_{n-1}$. (USAMOS $\sigma = (\sigma_{n-1} \circ \dots \circ \sigma_1) \circ \text{id} = \sigma_1^{-1} \circ \dots \circ \sigma_{n-1}^{-1} \circ \text{id} = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_{n-1}$, POIS $\sigma_j^{-1} = \sigma_j$, JÁ QUE σ_j SÃO ELEMENTARES)

AGORA, VAMOS MOSTRAR QUE SE $\sigma = \sigma_m \circ \dots \circ \sigma_1 = \tilde{\sigma}_m \circ \dots \circ \tilde{\sigma}_1$, σ_j E $\tilde{\sigma}_j$ ELEMENTARES, ENTÃO $(-1)^m = (-1)^{\tilde{m}}$.

JÁ VIMOS QUE EXISTE!

FIXEMOS $D: M_{n,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ UMA FUNÇÃO DETERMINANTE. LOGO

TROCA UMA LINHA

TROCA UMA LINHA

TROCA UMA LINHA

$$\begin{aligned} D(e_1, \dots, e_n) &\stackrel{\text{TROCA UMA LINHA}}{=} -D(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \stackrel{\text{TROCA UMA LINHA}}{=} (-1)^2 D(e_{\sigma \circ \sigma(1)}, \dots, e_{\sigma \circ \sigma(n)}) \stackrel{\text{TROCA UMA LINHA}}{=} (-1)^3 D(e_{\sigma \circ \sigma \circ \sigma(1)}, \dots, e_{\sigma \circ \sigma \circ \sigma(n)}) \\ &= (-1)^m D(e_{\sigma \circ \dots \circ \sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(1)}) = (-1)^m D(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

DA MESMA MANEIRA, TEMOS $D(e_1, \dots, e_n) = (-1)^m D(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$. PORTANTO, $(-1)^m = (-1)^m$ ■

DEFINIÇÃO: DADO $\sigma \in S_n$, DEFINIMOS O SINAL DA PERMUTAÇÃO $\text{sign}(\sigma) \in \{-1, 1\}$ COMO O NÚMERO $\text{sign}(\sigma) = (-1)^M$, EM QUE $M \in \mathbb{N}$ E $\sigma_1, \dots, \sigma_M$ SÃO PERMUTAÇÕES ELEMENTARES TAIS QUE $\sigma = \sigma_M \circ \dots \circ \sigma_1$.

NOTE QUE SE $\det: M_{n,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ É UMA FUNÇÃO DETERMINANTE, ENTÃO $\det(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \text{sign}(\sigma)$.

CONCLUÍMOS, ASSIM, QUE $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) A_{1\sigma(1)} \dots A_{n\sigma(n)}$.

ASSIM, O DETERMINANTE ESTÁ UNICAMENTE DETERMINADO E TERMINAMOS DEMO 2 ■