

Álgebra Linear e Aplicações

- *Propriedades dos determinantes.*



PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES:

1) AÇÃO DE OPERAÇÕES ELEMENTARES

- i) $\det(L_1, \dots, \lambda L_j, \dots, L_n) = \lambda \det(L_1, \dots, L_j, \dots, L_n)$ POR D1
- ii) $\det(L_1, \dots, L_i, \dots, L_j, \dots, L_i, \dots, L_n) = -\det(L_1, \dots, L_j, \dots, L_i, \dots, L_n)$ POR D2
- iii) $\det(L_1, \dots, L_i + \lambda L_j, \dots, L_j, \dots, L_n) = \det(L_1, \dots, L_i, \dots, L_j, \dots, L_n) + \underbrace{\lambda \det(L_1, \dots, L_j, \dots, L_j, \dots, L_n)}_{=0} = \det(L_1, \dots, L_i, \dots, L_j, \dots, L_n)$ POR D2').

2) $\det(L_1, \dots, L_i, \dots, L_n) = 0$ SE $L_i = 0$ PARA ALGUM $i \in \{1, \dots, n\}$.

DEMO: $\det(L_1, \dots, L_i, \dots, L_n) = \det(L_1, \dots, 0L_i, \dots, L_n) = 0 \det(L_1, \dots, L_i, \dots, L_n) = 0$
 $= L_i$, POIS $L_i = 0$

3) SE A NÃO É INVERSÍVEL (É SINGULAR), ENTÃO $\det(A) = 0$.

DEMO: SABEMOS QUE $A \sim U$, EM QUE U É ESCALONADA COM $p \leq n$ PIVÔS. PORTANTO, U TEM LINHAS IGUAIS A ZERO $\left(U = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right)$. ASSIM, $\det U = 0$.

MUDA O SINAL DO DETERMINANTE

PARA OBTER U DE A , BASTA FAZER OPERAÇÕES DE TROCAS DE LINHAS E DE SOMAS DE UMA LINHA POR UM MÚLTIPLO DE OUTRA. LOGO $\det(A) = \pm \det(U) = 0$.

↳ NÃO MUDA O DETERMINANTE.

4) SE A É TRIANGULAR, ENTÃO $\det(A) = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$.

DEMO: SUPONHA QUE $a_{ii} \neq 0, \forall i$.

i) SE A É TRIANGULAR INFERIOR $A = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, PODEMOS ESCALONÁ-LA (COMEÇANDO COM A 1ª COLUMNA) SÓ COM SOMAS DE LINHAS POR MÚLTIPLO DE OUTRA E OBTER $\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

NÃO MUDA O DETERMINANTE

$$\text{LOGO } \det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\right) = a_{11} \det\left(\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\right) = a_{11} a_{22} \det\left(\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix}\right) = \dots = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

ii) SE A É TRIANGULAR SUPERIOR, PODEMOS ESCALONÁ-LA (COMEÇANDO COM A ÚLTIMA COLUMNA) E OBTER $\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$. LOGO $\det(A) = a_{11} \dots a_{nn}$.

AGORA SUPONHA QUE A É TRIANGULAR SUPERIOR E $a_{ii}=0$. LOGO AS COLUNAS $C_1, \dots, C_i$ NÃO SÃO L.I's. PORTANTO A NÃO É INVERSÍVEL E $\det(A)=0=a_{11} \dots a_{ii} \dots a_{nn}$.
↳ POR 3)

(EXEMPLO: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$)
↑ COLUNAS C_i
 NOTE QUE C_1, C_2 E C_3 SÃO L.D.'S, POIS OS VETORES EM VERDE SÃO L.D.'S. LOGO A NÃO É INVERSÍVEL
↳ $a_{33}=0$

SE A É TRIANGULAR INFERIOR, ENTÃO $C_1, \dots, C_n$ SÃO L.D.'S E, NOVAMENTE, $\det(A)=0=a_{11} \dots a_{ii} \dots a_{nn}$.
↳ POR 3)

ANTES DE CONTINUAR AS PROPRIEDADES, NOTE QUE JÁ PODEMOS PROVAR O TEOREMA PARA $n=2$.

TEOREMA : EM $M_{2,2}(\mathbb{R})$ EXISTE UMA FUNÇÃO DETERMINANTE E ELA É ÚNICA.

DEMO: EXISTÊNCIA: OK! JÁ VIMOS.

UNICIDADE: SE $\det: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ É UMA FUNÇÃO DETERMINANTE, ENTÃO

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} [a \ 0] + [0 \ b] \\ c & d \end{bmatrix} \stackrel{D!}{=} \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{MAS } [cd] = [c \ 0] + [0 \ d]. \quad \text{Logo}$$

$$= \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

$$= \underset{\downarrow \text{PROP 3}}{0} + \underset{\downarrow \text{PROP 4}}{ad} - \underset{\downarrow \text{PROP 4}}{bc} + \underset{\downarrow \text{PROP 3}}{0} = ad - bc$$

5) Se $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ FOR INVERSÍVEL, ENTÃO $\det(A) \neq 0$. (CONCLUSÃO: $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$).

DEMO: SABEMOS QUE $A \sim U = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$. COMO PARA LEVAR A ATÉ U USAMOS APENAS TROCAS DE LINHAS (MUDA O SINAL DO DETERMINANTE) E SOMA DE UMA LINHA POR UM MÚLTIPLO DE OUTRA (O DETERMINANTE PERMANECE O MESMO), CONCLUÍMOS QUE $\det(A) = (-1)^k \det U = (-1)^k \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1$, EM QUE k É O NÚMERO DE TROCA DE LINHAS PARA LEVAR A ATÉ U.

SE A É INVERSÍVEL, ENTÃO A TEM n PIVÔS. LOGO $a_{jj} \neq 0, \forall j \in \{1, \dots, n\}$ ■

A PROPRIEDADE ACIMA NOS FORNECE UMA FORMA DE CALCULAR $\det(A)$.

EXEMPLO: SEJA $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. LOGO $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

LOGO $\det(A) = (-1)^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$

2 TROCAS DE LINHAS
DIAGONAIS DE U

VAMOS AGORA ASSUMIR A UNICIDADE PARA PROVAR AS PROPRIEDADES ABAIXO.

6) SEJAM $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. LOGO $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

DEMO: CASO 1 SUPONHA QUE $\det(B) = 0$

NESTE CASO, B NÃO É INVERSÍVEL. LOGO $\exists x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ TAL QUE $Bx = 0$. ASSIM, $ABx = 0$ E AB NÃO É INVERSÍVEL TAMBÉM. PORTANTO, $\det(AB) = 0$. CONCLUSÃO: $\det(AB) = 0 = \det(A) \cdot 0 = \det(A) \det(B)$.

CASO 2 SUPONHA QUE $\det(B) \neq 0$

NESTE CASO, DEFINIMOS $d: M_{n,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ POR $d(A) = \frac{\det(AB)}{\det(B)}$. PORTANTO,

i) $d(I) = \frac{\det(IB)}{\det(B)} = \frac{\det(B)}{\det(B)} = 1$.

L_A LINHA j DE A

NOTE QUE $AB = \begin{bmatrix} -L_A & - \\ \vdots & \\ -L_A & - \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -L_A B & - \\ \vdots & \\ -L_A B & - \end{bmatrix}$

ii) SE $L_A = L_{A_j}$, $i \neq j$, ENTÃO A LINHA i E j DE AB SÃO IGUAIS. LOGO $\det(AB) = 0 \Rightarrow d(A) = 0$

iii) TEMOS $d(L_A, \dots, \alpha L_j + \beta L_j', \dots, L_A) = \frac{1}{\det(B)} \det(L_A B, \dots, (\alpha L_j + \beta L_j') B, \dots, L_A B)$

$$= \frac{1}{\det(B)} [\alpha \det(L_A B, \dots, L_j B, \dots, L_A B) + \beta \det(L_A B, \dots, L_j' B, \dots, L_A B)]$$

$$= \alpha d(L_A B, \dots, L_j B, \dots, L_A B) + \beta d(L_A B, \dots, L_j' B, \dots, L_A B)$$

CONCLUÍMOS QUE A FUNÇÃO d É MULTILINEAR.

AS CONDIÇÕES i), ii) E iii) MOSTRAM QUE d É O DETERMINANTE. LOGO $\det(A) = \frac{\det(AB)}{\det(B)}$

$$\Leftrightarrow \det(AB) = \det(A) \det(B)$$

7) SEJA $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ INVERSÍVEL. ENTÃO $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

DEMO: BASTA OBSERVAR QUE $1 = \det(I) = \det(A^{-1}A) = \det(A^{-1}) \det(A)$

8) SEJA $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. LOGO $\det(A^T) = \det(A)$.

DEMO: SE A NÃO FOR INVERSÍVEL, ENTÃO A^T TAMBÉM NÃO É. LOGO $\det(A) = 0 = \det(A^T)$.

SE A É INVERSÍVEL, ENTÃO $\exists P, L, U$ TAL QUE $PA = LU$. LOGO $A^T P^T = U^T L^T$ E

$$\left. \begin{array}{l} A = P^T L U \\ A^T = U^T L^T P \end{array} \right\} \begin{array}{l} \det(A) = \det(P^T) \det(L) \det(U) \\ \det(A^T) = \det(P) \det(L^T) \det(U^T) \end{array} \right\} \det(A) = \det(A^T).$$

NOTE QUE $\det(L) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}\right) = \det(L^T)$ E $\det(U) = \det\left(\begin{bmatrix} u_{11} & & \\ 0 & \ddots & \\ & & u_{nn} \end{bmatrix}\right) = u_{11} \dots u_{nn} = \det\left(\begin{bmatrix} u_{11} & & \\ & \ddots & \\ u_{nn} & & \end{bmatrix}\right) = \det(U^T)$

$\det(P^T P) = 1 \Leftrightarrow \det(P) = [\det(P^T)]^{-1}$ COMO $\det(P) = \pm 1$, TEMOS $\det(P) = \det(P^T)$

$\hookrightarrow$ POIS MATRIZES DE PERMUTAÇÃO SÃO ORTOGONAIS

COROLÁRIO DE 8) A FUNÇÃO DETERMINANTE $\det: M_{n,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ É A ÚNICA FUNÇÃO QUE SATISFAZ:

1) $\det(I) = 1$

2) $\det(A) = 0$ SE A TEM 2 COLUNAS IGUAIS (EQUIVALE A MUDAR O SINAL COM TROCA DE COLUNAS).

3) $\det$ É MULTILINEAR NAS COLUNAS:

$$\det \begin{bmatrix} | & & | & & | \\ C_1 & \dots & \alpha C_j + \beta C_j' & \dots & C_n \\ | & & | & & | \end{bmatrix} = \alpha \det \begin{bmatrix} | & & | & & | \\ C_1 & \dots & C_j & \dots & C_n \\ | & & | & & | \end{bmatrix} + \beta \det \begin{bmatrix} | & & | & & | \\ C_1 & \dots & C_j' & \dots & C_n \\ | & & | & & | \end{bmatrix}$$

EXEMPLO: CALCULE $\det \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{=A}$

SOLUÇÃO: NOTE QUE $\det(A) = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftrightarrow C_2} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_3 = C_3 - C_2} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \overset{\substack{\uparrow \\ \text{POIS TROCOU COLUNAS.}}}{=} - (1)(-1)(3) = 3$ ■