7. Pequenas Oscilações

25/5/23

É comum considerar-se pequenos desvios de posições de equilíbrio para ter-se uma solução aproximada do sistema.

7.1 Configurações de equilíbrio

Seja um sistema 1D descrito pela lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} \alpha(q) \dot{q}^2 - V(q) \quad \text{com } \alpha(q) > 0$$

Uma posição de equilíbrio q_0 é tal que

$$\left. \frac{dV}{dq} \right|_{q_0} = 0$$

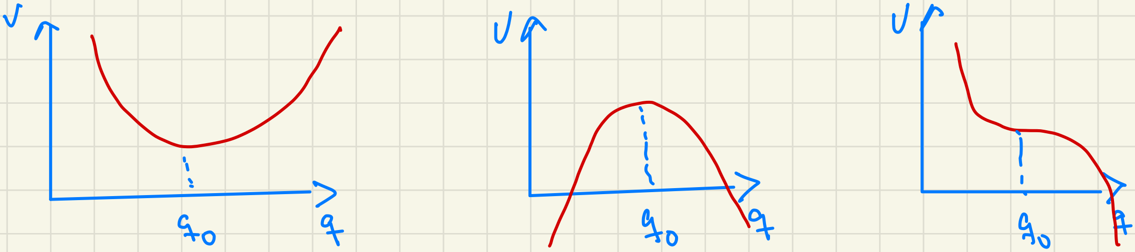
A eq. de movimento do sistema é

$$\alpha(q) \ddot{q} + \frac{d\alpha}{dq} \frac{1}{2} \dot{q}^2 + \frac{dV}{dq} = 0$$

Note que $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = 0 \Rightarrow q(t) = q_0$.

Nem todas as posições de equilíbrio são estáveis face a pequenos desvios da posição de equilíbrio.

Podemos ter 3 casos:



(a) (b) (c)

No caso (a), pequenos desvios de q_0 ficam restritos a uma região limitada $\Rightarrow$ equilíbrio estável

Nos casos (b) e (c) pequenos desvios de q_0 aumentam com o tempo $\Rightarrow$ equilíbrio instável

Exemplo: Estabilidade de órbitas circulares

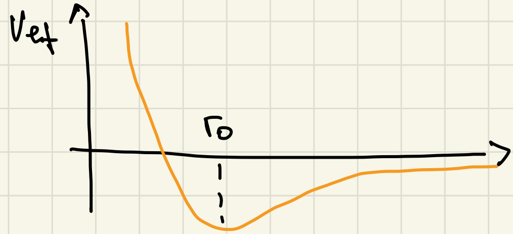
Consideremos o movimento plano na presença de um potencial central

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r)$$

Vimos que $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$ é conservado e que

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left(\overbrace{\frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r)}^{\text{potencial efetivo } V_{ef}}\right)$$

Para $V(r) = -G_N \frac{mM}{r}$



O mínimo de V_{ef} está em

$$\frac{dV_{ef}}{dr} = 0 \Rightarrow -\frac{P_\theta^2}{m r^3} + \frac{G_N m M}{r^2} = 0 \qquad r_0 = \frac{P_\theta^2}{m^2 M G_N}$$

$$\left.\frac{d^2 V_{ef}}{dr^2}\right|_{r_0} = +\frac{3P_\theta^2}{m r_0^4} - 2\frac{G_N m M}{r_0^3} = +\frac{3}{m} P_\theta^2 \frac{m^8 M^4 G_N^4}{P_\theta^8} - 2 G_N m M \frac{m^6 M^3 G_N^3}{P_\theta^6}$$

$$= \frac{G_N^4 m^7 M^4}{P_\theta^6}\left[3-2\right] > 0 \Longrightarrow \text{a órbita é estável!}$$

7.2 Pequenas oscilações em torno de equ. estável

Consideremos pequenas oscilações (η) ao redor de um ponto de equilíbrio estável q_0:

$$q = q_0 + \eta$$

$$V(q) = V(q_0) + \left.\frac{dV}{dq}\right|_{q_0}^{\nearrow 0} \eta + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2V}{dq^2}\right|_{q_0} \eta^2 + \dots$$

Analogamente, $\alpha(q) = \alpha(q_0+\eta) = \alpha(q_0) + \left.\frac{d\alpha}{dq}\right|_{q_0}\eta + \cdots$

Conservando apenas termos quadráticos em $\eta(\dot\eta)$

$$L \cong \frac{\alpha(q_0)}{2}\dot\eta^2 - \frac{1}{2}k\eta^2 - V(q_0)$$

0 mudando a referência da energia potencial

E eq. de movimento neste caso é

$$\alpha(q_0)\ddot\eta = -k\eta \Longrightarrow \ddot\eta = -\omega_0^2\eta$$

definindo $\omega_0^2 = k/\alpha(q_0)$

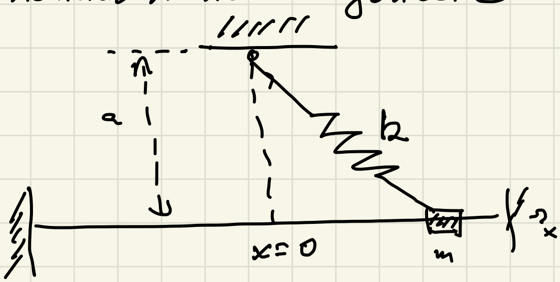
cuja solução geral é $\eta(t) = A\cos(\omega_0 t+\varphi)$

Constantes $= B\cos\omega_0 t + C\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t$

Período $T = 2\pi/\omega_0$

Exemplo: Corpo de massa m deslocando-se na horizontal. O comprimento natural da mola é L

$$V(x) = \frac{k}{2}\left(\sqrt{a^2+x^2}-\ell\right)^2$$



$$L = \frac{m}{2}\dot x^2 - \frac{k}{2}\left(\sqrt{a^2+x^2}-\ell\right)^2$$

extremos

só para $\ell > a$

$$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow k\left(\sqrt{a^2+x^2}-\ell\right)\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pm\sqrt{\ell^2-a^2}$$

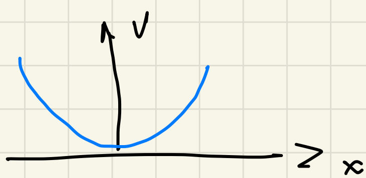
Analisemos a derivada segunda

$$\frac{d^2V}{dx^2} = k - lk\,\frac{\sqrt{a^2+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}}{(x^2+a^2)}$$

$$= k\left[1 - \frac{l}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{l\,x^2}{(x^2+a^2)^{3/2}}\right]$$

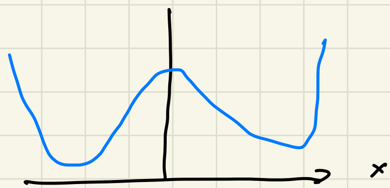
extremo	$d^2V/dx^2\vert_{\text{mínimo}}$	Condição
$x=0$	$k\left(1-\frac{l}{a}\right)$	$\rightarrow$ mínimo $l<a$; máximo $l>a$
$x=\pm\sqrt{l^2-a^2}$	$\underbrace{k\left[\cancel{1}-\cancel{1}+l\,\frac{l^2-a^2}{l^3}\right]}_{k\left(1-\frac{a^2}{l^2}\right)}>0$	$l>a$ mínimo

Para $l<a \Rightarrow$



$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}\left(1-\frac{l}{a}\right)$$

para $l>a \Rightarrow$



$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}\left(1-\frac{a^2}{l^2}\right)$$

ao redor de $\sqrt{l^2-a^2}$ ou $-\sqrt{l^2-a^2}$!!!

Curiosidade: Quebra espontânea de simetria

A Lagrangiana do sistema acima exibe a simetria sobre a troca $x \leftrightarrow -x$! Todavia as oscilações em torno de um dos mínimos de energia para $l > a$ $\left(\pm\sqrt{l^2-a^2}\right)$ não exibe essa simetria em y!! Note que isso acontece quando há mais de um estado de mínima energia (de equilíbrio) os quais são degenerados, ie, possuem a mesma energia.

Para $l < a$ o único estado de mínima energia é $x = 0$ e oscilações em torno deste exibem a simetria $x \leftrightarrow -x$.

1.3 Oscilações forçadas: caso 1D

Consideremos um oscilador harmônico sujeito a um amortecimento $-\alpha \dot{x}$ onde $\alpha > 0$. Aplicamos a este oscilador uma força externa $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$.

Nesse caso: $$m \frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - \alpha \frac{dx}{dt} + F(t) \Rightarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

A solução geral da eq. homogênea é:

Exercício: Mostre isso!

i) Para $\frac{\gamma^2}{4} < \omega_0^2$ [Amortecimento subcrítico]

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t) + c_2 e^{-\gamma t}\operatorname{sen}(\omega t)$$

onde $\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$ e c_1 e c_2 são constantes.

ii) Para $\frac{\gamma^2}{4} = \omega_0^2$ [Amortecimento crítico]

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)\, e^{-\frac{\gamma t}{2}}$$

constantes

iii) $\frac{\gamma^2}{4} > \omega_0^2$ [amortecimento supercrítico]

$$x(t) = c_1 e^{P_1 t} + c_2 e^{P_2 t}$$

onde $P_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$

A solução geral da eq. não homogênea é a solução geral da homogênea somada a uma solução particular da não homogênea. Para obter esta última consideraremos $z(t)$ complexo satisfazendo

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \gamma \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

e tomamos $x_p(t) = \text{Re}[z(t)]$ no final! Agora fazendo o Ansatz $z(t) = z_0 e^{i\omega t} \Rightarrow$

$$(\omega^2 + i\omega\gamma - \omega_0^2)\, z_0 \cancel{e^{i\omega t}} = \frac{F_0}{m} \cancel{e^{i\omega t}}$$

$$\Rightarrow \quad z_0 = \frac{F_0/m}{(\omega^2 - \omega_0^2) + i\omega\gamma} = A e^{i\varphi}$$

onde

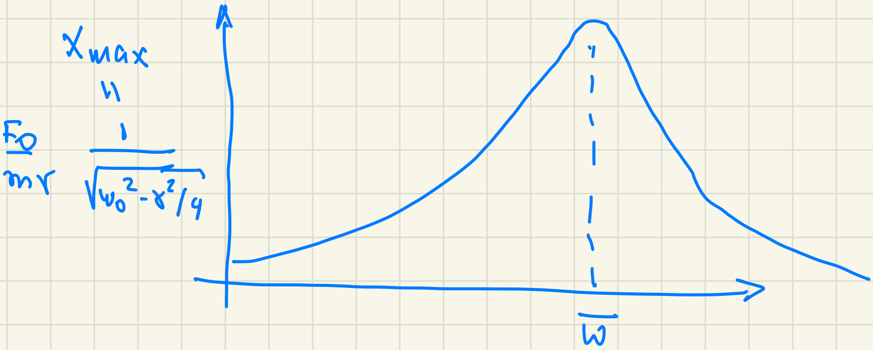
$$A = \left[\frac{F_0^2}{m^2 \{ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2 \}} \right]^{1/2}$$

e

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\Rightarrow x_p(t) = \frac{F_0}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]} \left[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t) + \gamma\omega \sin(\omega t) \right]$$

Note que temos uma ressonância para $\bar{\omega}^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}$



Até aqui tudo conhecido de Física 2. E para uma "força geral" $F(t)$? Novamente

1/6/23

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

Consideremos a função $G(t-t')$ que satisfaz à eq. diferencial

$$\frac{d^2 G(t,t')}{dt^2} + \gamma \frac{dG(t,t')}{dt} + \omega_0^2 G(t,t') = \delta(t-t') \quad (*)$$